Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Matemáticas para administración / Javier Cortés Martin, /
Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-59-5

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

Unidad 1

Teoría de conjuntos

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciado estudiante en la presente cartilla se trabajará la temática relacionada con la teoría de conjuntos la cual tiene como propósito fundamentar los elementos generales de la misma, hacer uso de su operatividad a través de diagramas que facilitaran la comprensión de dicha temática, de igual forma de la aplicación de problemas con situaciones tomadas en contextos reales donde se abordará cada una de sus operaciones como son la unión, la intersección, el complemento y la diferencia, que como proceso de formación le ayudará a estructurar su lógica matemática logrando potenciar sus habilidades para la solución de situaciones problema.

U1

Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudaran a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por ultimo a lograr la comprensión de la unidad temática.

Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.

Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.

Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.

Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda envíe un mensaje a su tutor y/o retome las ayudas para el aprendizaje lo cual le ayudará a aclarar sus dudas.

Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.

Teoría de conjuntos

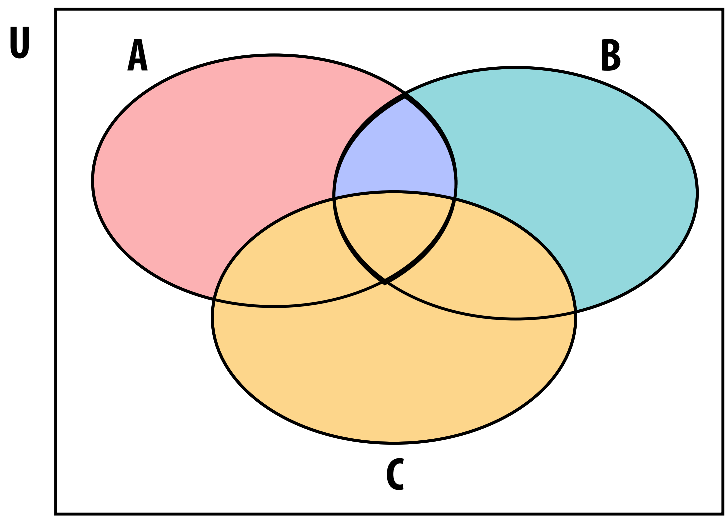


Imagen 1
Fuente: Propia.

Conceptos históricos

En el último cuarto del siglo XIX se vivió un episodio apasionante de la historia de las matemáticas que las ligaría desde entonces a la historia de la lógica.

Primero, Georg Boole (1815-1864) en su Mathematical Analysis of Logic trató de presentar la lógica como parte de las Matemáticas. Poco después Gottlob Frege (1848-1925) intentó mostrar que la aritmética era parte de la lógica en su Die Grundlagen der Arithmetik. Pero, dando un gran paso tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de la lógica, George Cantor se había adelantado a Frege con una fundamentación lógica de la aritmética. Cantor había demostrado que la totalidad de los números naturales comprendidos en el intervalo de extremos 0 y 1 no es numerable, en el sentido de que su infinitud no es la de los números naturales. Como una consecuencia de esa situación, Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la teoría de conjuntos.

Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde entonces los debates en el seno de la teoría de conjuntos han sido siempre apasionados, sin duda por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas.

Según la definición de conjunto de Cantor, éste es "una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto". Frege fue uno de los admiradores de la nueva teoría de Cantor, y dio una definición de conjunto similar.

En 1903 B. Russell demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto en la teoría de Cantor. Pero pronto la teoría axiomática de Zermelo (1908) y refinamientos de ésta debidos a Fraenkel (1922), Skolem (1923), John Von Newman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual.

Es indiscutible el hecho de que la teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, es además, la teoría matemática dónde fundamentar la aritmética y el resto de teorías matemáticas. Es también indiscutible que es una parte de la lógica y en particular una parte de la lógica de predicados.

En esta historia cruzada de las matemáticas, la lógica y los fundamentos de ambas, la teoría de conjuntos permitiría por un lado una fundación logicista (tendencia lingüística que sostiene que el lenguaje refleja rigurosamente el pensamiento y que por tanto la gramática, ciencia del lenguaje, ha de reflejar la lógica, ciencia del pensamiento) de las matemáticas; pero por otro lado la teoría de conjuntos mirada como parte de las matemáticas proporciona el metalenguaje, el contexto o sustrato de las teorías lógicas. Finalmente, puede ser completamente expresada en un lenguaje de primer orden y sus axiomas y teoremas constituyen una teoría de primer orden a la que pueden aplicarse los resultados generales que se aplican a cualquier teoría de primer orden.

Definición

Los conjuntos están relacionados con el proceso de contar y por lo tanto permiten resolver problemas que involucran el concepto de cantidad. Se puede afirmar que un conjunto es una colección de objetos, símbolos o entidades bien definidas, que reciben el nombre de elementos del conjunto.

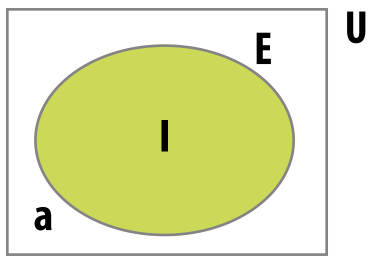
Diagrama de Venn- Euler

Mediante la utilización de diagramas o esquemas gráficos se puede visualizar los conjuntos y las relaciones entre ellos, llamados diagramas Venn- Euler. Estos esquemas se conforman por una región cerrada del plano, generalmente un rectángulo, la cual representa el conjunto universal. Cada círculo representa los conjuntos a graficar y se denota por una letra mayúscula, usualmente A, B, C, D, y sus elementos con letras minúsculas a, b, c, d.

Nota

1. Para representar a un elemento que pertenece a un conjunto, se utiliza el símbolo ∈.
2. Para indicar que el elemento no está en el conjunto se utiliza el símbolo "∉" (se lee no pertenece a).

Graficamente se puede observar.



$1 \in E$

$a \notin E$

Figura 2
Fuente: Propia

Los conjuntos se nombran se dos formas:

1. Por extensión

   Un conjunto se define por extensión cuando solamente se describe cada uno de los elementos del conjunto. Por ejemplo:

   A = {1, 3, 5, 7}

   B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

   C= {a, e, i, o, u}

2. Por comprensión

   Un conjunto se define por comprensión cuando se nombra una propiedad común a los elementos del conjunto. Por ejemplo:

   A = {Números naturales impares menores que 7}

   B = {Vocales del lenguaje castellano}

   C= $\{x/x \in 2 \leq x < 5\}$. Para este ejemplo se debe utilizar un lenguaje más preciso, el cual se lee:

   C es igual al conjunto de todos los números reales tales que (tienen la condición) dos es menor o igual a x, y a su vez, x es menor que 5.

   Aplicaciones:

   Esta notación se usa con mucha frecuencia para describir intervalos, para escribir la solución de una desigualdad o para representar el dominio de una función real, cuya información es válida para interpretación de información que puede ser de tipo económico, tributario, educativo, etc.

Clasificación de los conjuntos

Conjuntos infinitos

Sea A = {x/x ∈ 1≤ x < 5} o Z = {x ∈ / x es impar}

Son conjuntos que no se pueden expresar por extensión debido a que nunca se terminaría de escribir la lista de los números reales que pertenecen al conjunto A. Para el conjunto Z los números naturales que son impares tampoco se pueden escribir por extensión, por lo tanto este tipo de conjuntos reciben el nombre de conjuntos infinitos.

Conjuntos Finitos

C = {a,e,i,o,u}

Este tipo de conjunto si se puede escribir por extensión ya que están formados por una cierta cantidad de elementos definidos en este caso por las vocales del alfabeto español y reciben el nombre de conjuntos finitos.

1. Conjunto vacío

   Se define como el conjunto que carece de elementos. Se simboliza de la siguiente manera

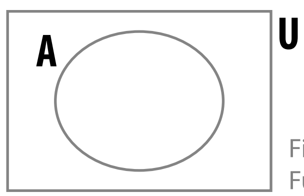


Figura 3
Fuente: Propia.

También se puede representar el conjunto vacío con los símbolos { } y ∅ . El conjunto ∅ forma parte de cualquier conjunto A, por lo cual se puede afirmar que: ∅⊂ A.

2. Conjunto unitario

   Se define conjunto unitario al conjunto formado por un sólo elemento.

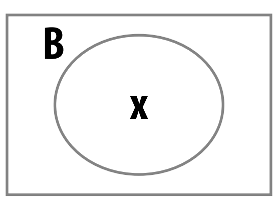


Figura 4
Fuente: Propia.

B = Conjunto unitario

B = {x }

3. Conjunto universal

Es necesario establecer la naturaleza de los elementos de un conjunto que contiene todos los elementos posibles para un problema particular en consideración. Símbolo: U. El conjunto universal se define de acuerdo con el alcance del problema bajo estudio.

Por ejemplo, en un problema que sólo involucra números naturales, el conjunto universal es el conjunto de todos los números naturales: {1, 2, 3, 4, . . .}. Cualesquiera otros subconjuntos involucrados, como el conjunto de los números pares {2, 4, 6, . . .}, se toman de este conjunto universal.

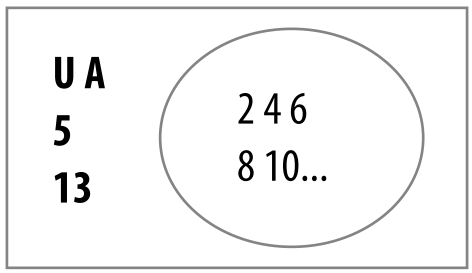


Figura 5
Fuente: Propia.

Relaciones entre conjuntos

Subconjuntos

Un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si cada elemento en A está también en B.

Por ejemplo, si A = {1, 3, 5} y B = {1, 2, 3, 4, 5}, entonces A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$.

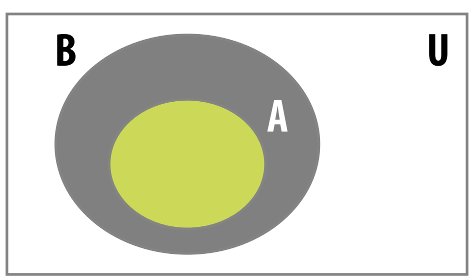
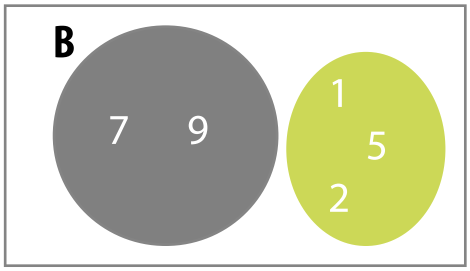


Figura 6
Fuente: Propia.

Conjuntos disyuntos

Cuando dos conjuntos son completamente diferentes (no tienen ningún elemento en común) reciben el nombre de conjuntos disyuntos, es decir su intersección es vacía.

Ejemplo.



$A \not\subset B$ y $B \not\subset A$ y no hay elementos comunes

Figura 7
Fuente: Propia.

Operaciones entre conjuntos

Así como las operaciones, suma, resta, multiplicación y división están definidas sobre los números reales, también existen operaciones definidas entre los conjuntos como la unión, intersección, complemento, diferencia, diferencia simétrica.

A. Unión

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, se define la unión entre A y B como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B. Simbólicamente la unión se define así:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A, \vee, x \in B\}, \text{ donde el símbolo “}\vee\text{” se lee “o”.}$$

graficamente se observa

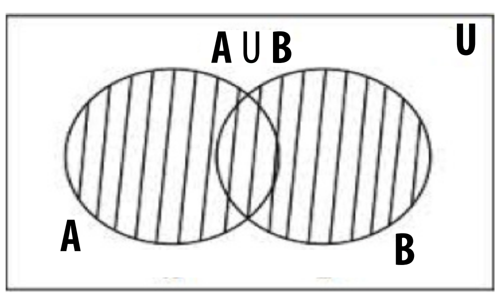


Figura 8
Fuente: Propia.

Ejemplo 1.

Si A= {x ∈ N / x es dígito par o dígito primo}, gráficamente la representación de esta unión es A U B:

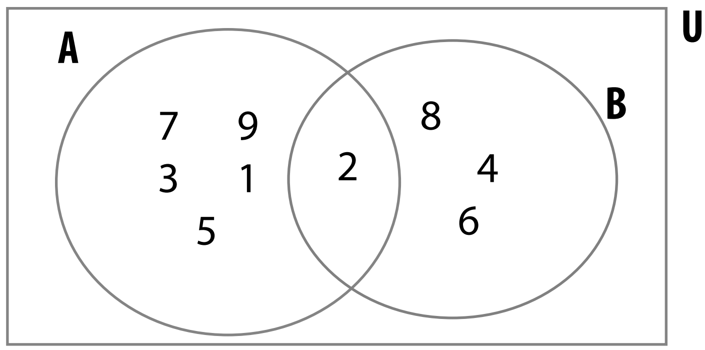


Figura 9
Fuente: Propia.

U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A = {1,2,3,5,7,9}, B = {2,4,6,8} A ∪ B={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

El ejemplo permite observar que el único dígito que es a la vez par y primo es el número 2 por ello se encuentra en la mitad de ambos conjuntos y hace parte de la unión.

Ejemplo 2.

Sean **A ={1,2,3,4}; B ={2,4,6,8}; C ={3,4,5,6}.**

Hallar: **a) A U B; b) A U C; c) B U C; d) B U B**

Solución:

A U B = {1, 2, 3, 4, 6, 8}

A U C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B U C = {2, 4, 6, 8, 3, 5}

B U B = {2, 4, 6, 8}

B. Intersección

Se define la intersección entre dos conjuntos A y B como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente al conjunto A y al conjunto B.

Simbólicamente la intersección se expresa así: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A, \wedge, x \in B\}$, donde el símbolo "∧" se lee "y".

Ejemplo 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (Conjuntos disyuntos).

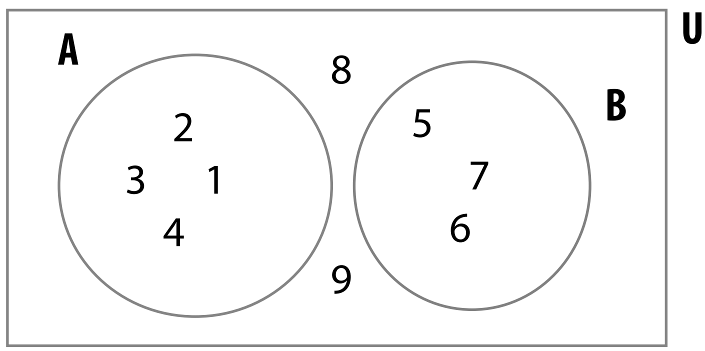


Figura 10
Fuente: Propia.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \; A = \{1,2,3,4\} \; B = \{5,6,7\} \; A \cap B = \{\ \}$$

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su intersección es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos, nótese que no tienen elementos en común.

ejemplo 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

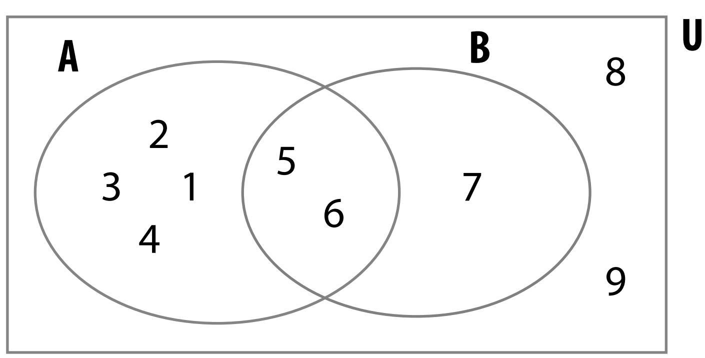


Figura 11
Fuente: Propia.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \; A = \{1,2,3,4,5,6\}, \; B = \{5,6,7\} \; A \cap B = \{5,6\ \}$$

ejemplo 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

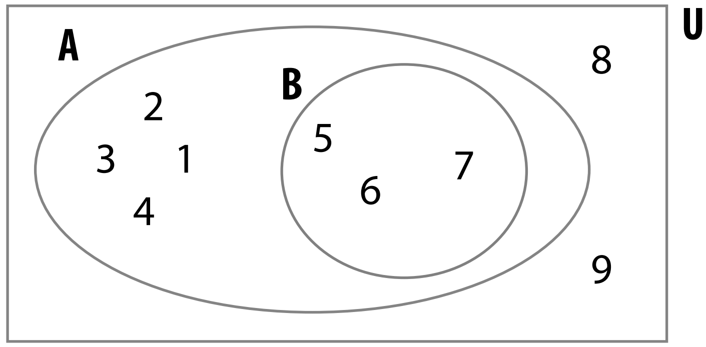


Figura 12
Fuente: Propia.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \; A = \{1,2,3,4,5,6,7\} \; B = \{5,6,7\} \; A \cap B = \{5,6,7\} = B$$

Esto permite afirmar que si A ⊂B, entonces A ∩ B = A ; análogamente se puede inferir que si B ⊂A, entonces, A ∩ B = B.

Ejemplo 3

Observa las intersecciones que se presentan en el siguiente ejemplo:

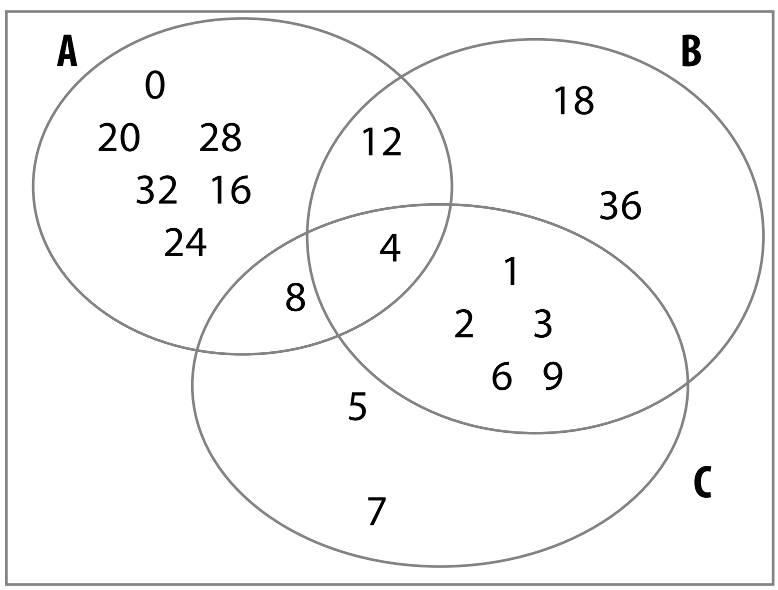


Figura 13
Fuente: Propia.

$$A \cap B = \{12\} \; B \cap C = \{1,2,3,6,9\} \; A \cap C = \{8\} \; A \cap B \cap C = \{4\}$$

C. Diferencia

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces se define la diferencia entre A y B así:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A, \wedge, x \notin B\}$$

Se lee: A diferencia B, es el conjunto formado por los elementos x que están en el Conjunto A pero no están en el conjunto B.

Observemos algunos ejemplos donde se representa la diferencia entre conjuntos.

ejemplo 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (Conjuntos disyuntos)

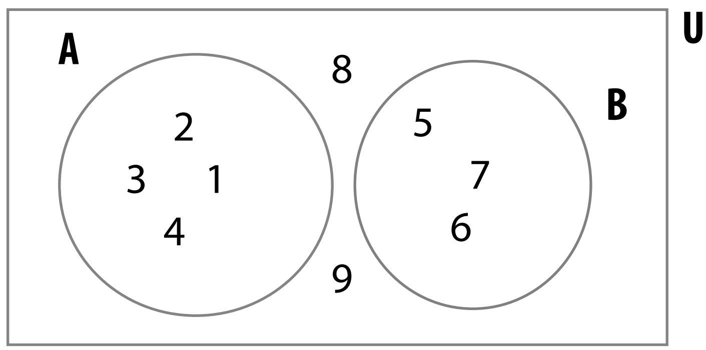


Figura 14
Fuente: Propia.

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} A = {1, 2, 3, 4} B = {5, 6, 7}

A - B = A = {1, 2, 3, 4} B - A = B = {5, 6, 7}

Ejemplo 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

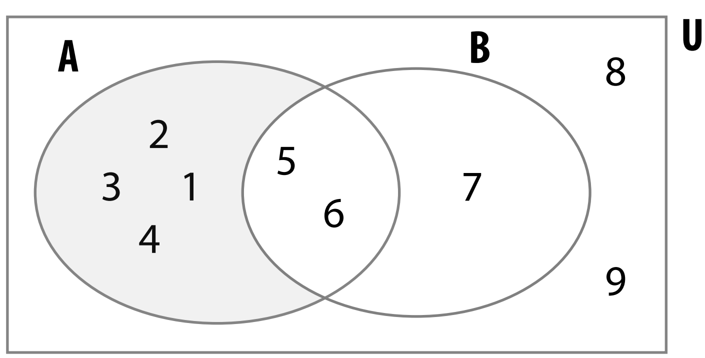


Figura 15
Fuente: Propia.

U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} A = {1,2,3,4,5,6} B = {5,6,7} A - B = {1,2,3,4}

Ejemplo 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

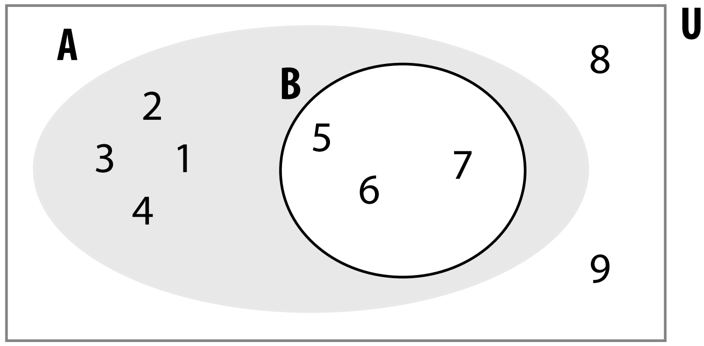


Figura 16
Fuente: Propia.

U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} A = {1,2,3,4,5,6,7} B = {5,6,7}

A - B = {1,2,3,4} B - A = { }

Se puede observar que todos los elementos que están en B, están en A (debido a que B ⊂A), por lo tanto no existe ningún elemento que pertenezca a la diferencia B – A y en consecuencia B – A = ∅.

D. Diferencia simétrica

Se define la diferencia simétrica entre dos conjuntos no vacíos A y B, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B, pero no pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

Simbólicamente la diferencia simétrica entre A y B se escribe así:

$$A \Delta B = \{x \ / \ x \in A, \vee, x \in B, \wedge, x \notin A \cap B\}.$$

Gráficamente se observa

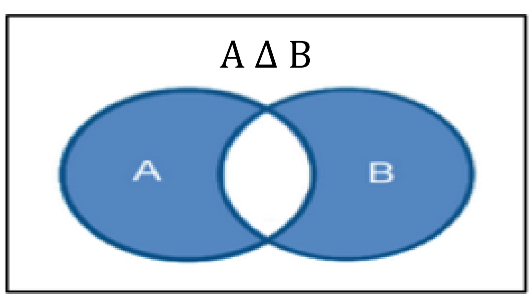


Figura 17
Fuente: Propia.

Ejemplo 1. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

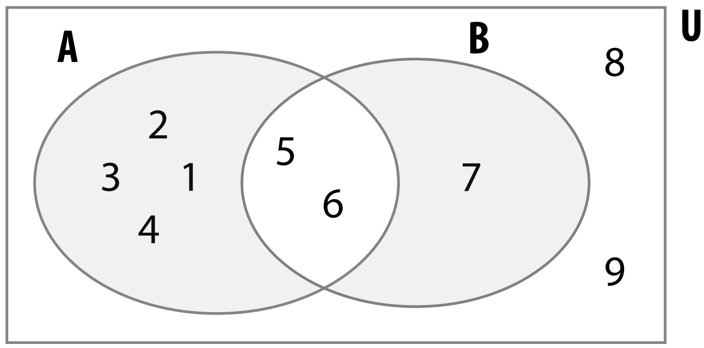


Figura 18
Fuente: Propia.

U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} A = {1,2,3,4,5,6} B = {5,6,7}

A Δ B = {1,2,3,4,7} B Δ A = {1,2,3,4,7}

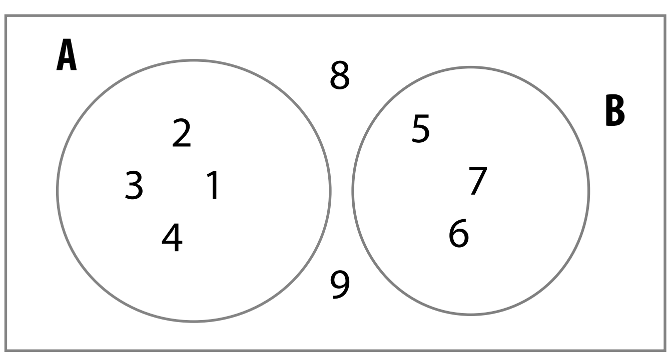
Nótese en el ejemplo que la diferencia simétrica son todos los elementos que hacen parte de la unión menos la intersección.

E. Complemento

Si A es un conjunto no vacío, el complemento de A, simbolizado por A', está formado por todos los elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir,

$$A' = Ac = A^{*} = A = \{x \,/\, x \notin A\}$$

Ejemplo 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).



U= {1,2,34,5,6,7,8,9}

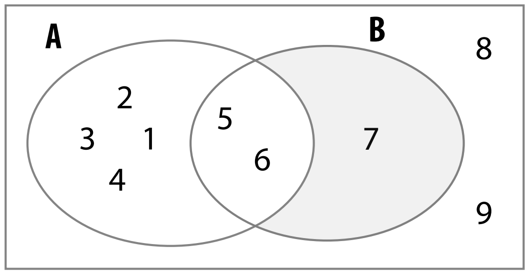
A={1,2,3,4}

B={5,6,7}

A'={5,6,7,8,9}

Figura 19
Fuente: Propia

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.



$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{5,6,7\}$

$A' = \{7,8,9\}$

Figura 20
Fuente: Propia

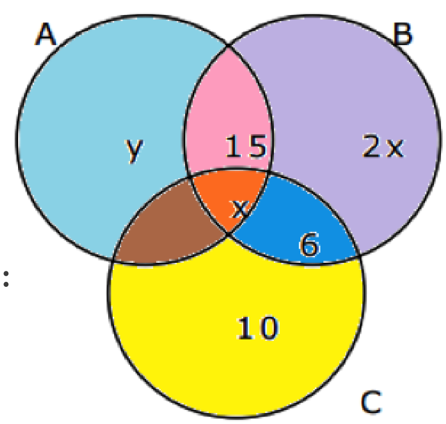
Problemas de aplicación

A continuación se ilustraran algunos ejemplos de la forma como se aplica la teoría de conjuntos para resolver situaciones que son propias de contextos reales, preste mucha atención a los ejemplos y trate de practicarlos hasta que comprenda la lógica que se maneja en dicha situación problema.

Ejemplo 1

De una encuesta hecha a 135 personas para establecer preferencias de lectura de las revistas A, B y C; se obtienen los siguientes resultados: Todos leen alguna de las 3 revistas; todos, menos 40, leen A; 15 leen A y B pero no C, 6 leen B y C pero no A; 10 leen sólo C. El número de los que leen A y C es el doble del número de los que leen las 3 revistas. El número de los que leen sólo B es el mismo que el total de los que leen A y C. Según todo esto, hallar el número de los que leen solamente A.

Solución:



$n(A) = 95$
$n(A \cap B - C) = 15$
$n(B \cap C - A) = 6$
$n(C - (A \cup B)) = 10$

$y + 15 + 2x = 95$
$y + 2x = 80$

$4x + y + 31 = 135$
$4x + y = 104$

$$\begin{array}{r} -\left\{ \begin{array}{r} y + 2x = 80 \\ \underline{y + 4x = 104} \end{array} \right. \\ 2x = 24 \\ x = 12 \end{array}$$

$$\boxed{y = 56}$$

Figura 21
Fuente: Propia

Ejemplo 2

En una fiesta infantil hay 3 sabores de jugos; guanaba, naranja y tamarindo. Represente gráficamente con diagrama de Venn y con expresiones matemáticas los siguientes consumos de jugos por parte de los niños.

a. no consumen agua de guanábana.

b. no les gusta ninguno de los tres sabores.

c. prefieren solo agua de guanaba.

d. prefieren agua de guanábana y naranja, pero no de tamarindo.

Solución:

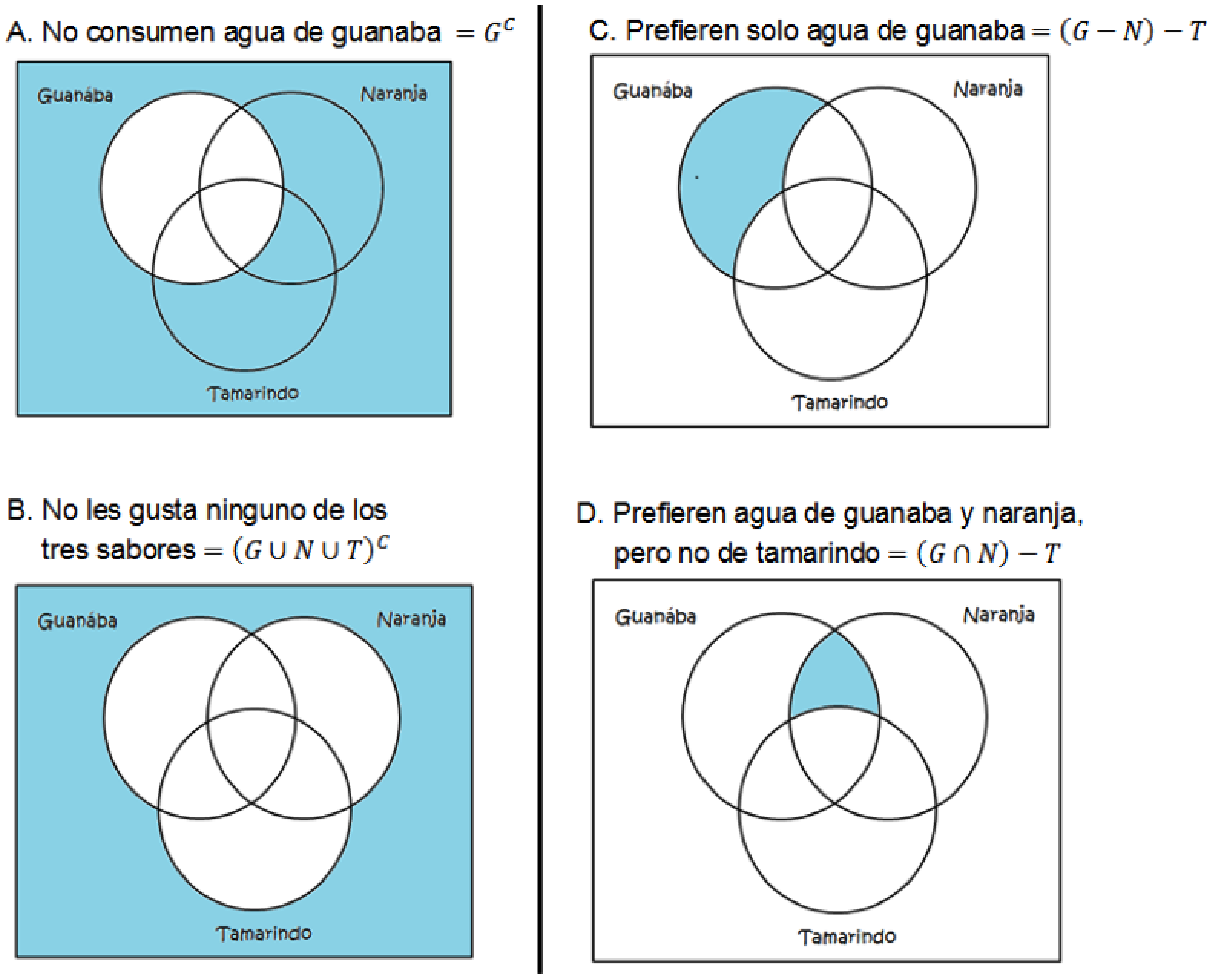


Imagen 1
Fuente: https://sites.google.com/site/fundadematematicagrupo4/_/rsrc/1398404519372/contenidos-1/conjuntos/d.jpg

1

Unidad 1

Los números reales

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciado estudiante en esta segunda cartilla se encuentran relacionados los temas correspondientes a los números reales donde se trabajaran cada uno de los universos numérico pasando por lo naturales, los enteros, los racionales y los irracionales para lograr comprender el conjunto de los números reales, en cada uno de ellos se trabajará la operatividad básica, algunas propiedades de total importancia y se finalizará con la aplicación de algunas situaciones problema orientados en contextos reales.

U1

Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

U1 Desarrollo temático

Los números reales

1	**12,38**	**-0,8625**	**3/4**	**√2**	**1998**

Números naturales y enteros

Introducción

En la vida real hay situaciones en las que los números naturales no son suficientes.

Por ejemplo: si tiene 100 pesos y debe 150 pesos ¿De cuánto dispones?
El buzo está a 15 m de profundidad, se escribe -15 m.
El globo está a 20 m de altura, Se escribe +15 m.
Estas y más situaciones de la cotidianidad exigen una interpretación dada desde los números enteros para poderlas entender y resolver.

Números naturales – N-

Los números naturales son simplemente 0, 1, 2, 3, 4, 5… aunque según a quien pregunte, el cero es o no un número natural, así que le pueden decir que los números naturales son 1, 2, 3, 4, 5…

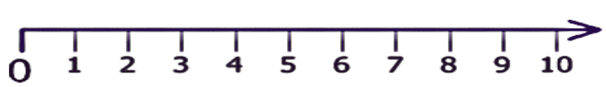


Imagen 1
Fuente: Propia.

Enteros- Z-

Los enteros son como los naturales, pero se incluyen los números negativos o sea los números del cero hacia la izquierda.

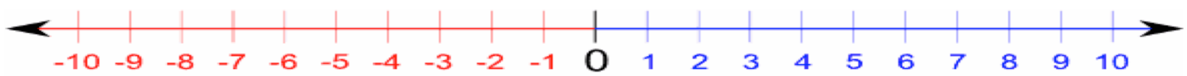


Imagen 2
Fuente: Propia.

Así que un entero puede ser negativo (-1, -2,-3, -4, -5,), positivo (1, 2, 3, 4, 5,), o cero (0).

Números	Nombre
0, 1, 2, 3, 4, 5, …	**Naturales**
… -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …	**Enteros**

Ordenar y comparar números enteros.

Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica mayor es.

Cuanto más a la izquierda esté situado menor es.

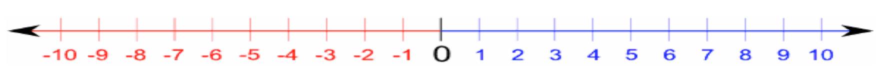


Imagen 3
Fuente: Propia.

-1 está más a la izquierda que +2.
por tanto –1 es menor que +2.
Se escribe $-1 < +2$.

-6 está a la izquierda de -3 ⇒.
-6 es menor que –3.
Se escribe $-6<-3$.

Valor absoluto

¿A qué distancia se encuentra –3 de cero?
¿A qué distancia se encuentra +7 de cero?

El valor absoluto de un número entero es la distancia que lo separa del cero.
Se escribe entre dos barras | | y es el número sin su signo:

Ejemplo: |+a| = a |-a| = a

|+4|=4

Imagen 4
Fuente: Propia.

La distancia de +4 a cero es 4.
El valor absoluto de +4 es 4.

|-3|=3

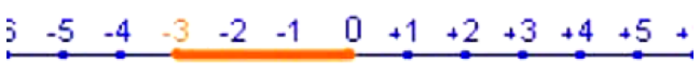


Imagen 5
Fuente: Propia.

La distancia de -3 a cero es 3.
El valor absoluto de -3 es 3.
El valor absoluto es una distancia por lo cual no puede ser negativo.

Suma y resta de números enteros

Suma de números enteros

¿Qué significan las siguientes expresiones?
• +6 +3 = +9
Tiene 6 pesos y le dan 3 pesos =>tienes 9 pesos en total.

• -7 -5 = -12
Debe 7 pesos y gastas 5 pesos => acumula una deuda de 12 pesos
• -6 +8 = +2
Tiene 8 pesos, pero debe 6 pesos => tiene 2 pesos. El dinero supera las deudas

• -5 +3 = -2
Debe 5 pesos y tiene 3 pesos => debe 2 pesos. Las deudas superan el dinero.

Suma de tres o más enteros

Para sumar 3 o más enteros tenemos dos métodos:

1) Agrupar los dos primeros sumandos y sumar al resultado el tercer sumando.
Ejemplo: +6 -4 +3 = -2 +3 = +1
En el caso de 4 sumandos se puede agrupar de dos en dos:
Ejemplo: +6 -4 +3 -2 = +2 +1 = +3

2) Sumar los positivos por un lado y los negativos por el otro y finalmente hallar el resultado.
Ejemplo: -7 +8 -5 = -12 +8 = -4
Ejemplo: +6 -4 +3 -2 = -6 +9 = +3

Ejemplo: ¿Cómo sumar –4 +1+2?
1º método: agrupando.
-4 + 1 + 2 = -3+2 = -1
2º método: deber–tener.
-4 + 1 + 2 = -4+3 = -1

Observe la siguiente regla utilizada para destruir paréntesis y posteriormente los ejemplos propuestos.
+(+a) = +a -(-a) = +a
+(-a) = -a -(+a) = -a

Ejemplos ¿Cuál es el resultado? Eliminar paréntesis y operar.
(+3) + (-5) = +3 – 5 = -2
(-2) + (+4) = -2 + 4 = +2
(+1) - (+7) = +1 – 7 = -6
(+2) - (-6) = +2 + 6 = +8
(-2) - (+6) = -2 - 6 = -8

Suma y diferencia de enteros con paréntesis

Cuando se presenten ejercicios del tipo:

- (-5) + (-2) =
- (+3) - (-7) =

Deberemos

1º) Eliminar los paréntesis.
2º) Operar adecuadamente los números resultantes.
Recuerda que: + (+a) = +a - (+a) = -a
+ (-a) = -a - (-a) = +a
(+2) - (+6) + (-5) = +2 - 6 - 5 = -9
(-3) + (-5) - (-7) = -3 – 5 + 7 = -1
(-2) – (-5) + (-3) – (-2) = -2 +5 –3 +2 = +2
(-3) + (-4) – (-3) + (-1) = -3 –4 +3 –1 = -5

Producto de números enteros

Para multiplicar enteros debemos:
1º) Multiplicar los números sin signo.
2º) Aplicar la ley de los signos.

+	por	+	=	+
-	por	-	=	+
+	por	-	=	-
-	por	+	=	-

Ejemplos:
(+4)·(+3) = +12
(-2)·(-5) = +10
(+4)·(-2) = -8
(-6)·(+4) = -24

Analiza las siguientes situaciones problema.
1. Ricardo ahorra 6000 pesos al mes, ¿cuánto ahorrará al cabo de 4 meses?
(+6000)·(+4) =+24.000 pesos ahorrará.
2.al cabo de 4 meses. Ana gasta 5 pesos al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 3 meses?
(-5)·(+3) =-15 pesos gastará.

División de enteros

Para dividir enteros debemos:
1º) dividir los números sin signo.
2º) Aplicar la ley de los signos.

Ejemplos:

(+24):(+3) = +8
(-20):(-5) = +4
(+14):(-2) = -7
(-16):(+2) = -8

Potenciación de números enteros

Es la operación aritmética que tiene por objeto multiplicar por sí mismo un número llamado base tantas veces como indica otro número llamado exponente. Se puede definir también como una multiplicación abreviada.

$$9^2 = 81$$

$9^2 = 81$
9 es la base
2 es el exponente
81 es la potencia

Figura 1
Fuente: Propia.

Ejemplos:

$$3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$$
$$4^5 = 4\times4\times4\times4\times4 = 1{,}024$$
$$5^6 = 5\times5\times5\times5\times5\times5 = 15,625$$
$$6^7 = 6\times6\times6\times6\times6\times6\times6 = 279,936$$
$$7^8 = 7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7 = 5'764,801$$

Radicación de números enteros

La radicación es la operación inversa de la potenciación y consiste en hallar la base conocidos el exponente y la potencia.

Si tenemos que $7^2 = 49$, podemos escribir que $7 = \sqrt[2]{49}$, donde el signo $\sqrt{}$ recibe el nombre de signo radical, 49 es la cantidad subradical, 7 es la raíz cuadrada y el número 2 es el índice de la raíz. En este caso como el índice de la raíz es 2 se trata de una raíz cuadrada.

Números racionales -Q-

Un número racional es un número que se puede escribir en forma de fracción (o sea, como un cociente) el cual se expresa de la forma a/b donde a y b son enteros y b es diferente de cero.

Ejemplo 1,5 es un número racional porque 1,5 = 3/2 (se puede escribir en forma de fracción).

Ejemplos: Observa la siguiente tabla.

Número	En fracción	¿Racional?
5	**5/1**	**Sí**
1,75	**7/4**	**Sí**
.001	**1/1000**	**Sí**
0,111...	**1/9**	**Sí**
√2	**?**	**¡NO!**

Tabla 1
Fuente: Propia.

La raíz cuadrada de 2 no se puede escribir en forma de fracción, de igual forma hay muchos más números así.

Representación de las fracciones

Para representar fracciones dividimos la unidad en las partes que nos indique el denominador y tomamos las partes que nos indique el numerador.

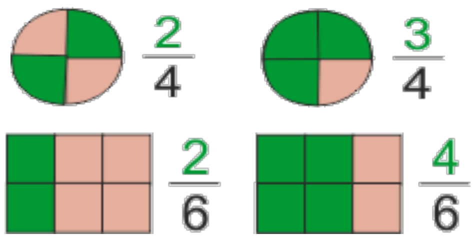


Figura 2
Fuente: Propia.

Clasificación de las fracciones

Fracciones propias

Las fracciones propias son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador. Su valor está comprendido entre cero y uno.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{10}$$

Fracciones impropias

Las fracciones impropias son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Su valor es mayor que 1.

Ejemplo:

$$\frac{5}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{13}{10}$$

Número mixto

El número mixto o fracción mixta está compuesto de una parte entera y otra fracción propia.

Para pasar de número mixto a fracción impropia:

1. Se deja el mismo denominador.

2. El numerador se obtiene de la suma del producto del entero por el denominador más el numerador, del número mixto.

Ejemplo:

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Para pasar una fracción impropia a número mixto:

1. Se divide el numerador por el denominador.

2. El cociente es el entero del número mixto.

3. El resto es el numerador de la fracción.

4. El denominador es el mismo que el de la fracción impropia.

Ejemplo: Pasar 13/5 a número mixto.

$$\begin{array}{l|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \qquad \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Fracciones decimales

Las fracciones decimales tienen como denominador una potencia de 10

$$\frac{23}{100}, \quad \frac{12}{1000}, \quad \frac{3}{10}$$

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes cuando el producto obtenido al multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda coincide con el producto obtenido al multiplicar el numerador de la segunda por el denominador de la primera. Dicho de otra manera al hacer el producto cruzado nos da una igualdad.

Ejemplo: Verifica si $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes:

4*12=6*8 48=48

Fracciones irreducibles

Las fracciones irreductibles son aquellas que no se pueden simplificar, esto sucede cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, o lo que es lo mismo, cuando el mcd de ambos números es 1. De otra forma a todo el conjunto de fracciones irreductibles se le conoce como el conjunto de los racionales.

Ejemplo:

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{6}{13}, \quad \frac{2}{5}$$

Suma y resta de números racionales

Fracciones homogéneas: son aquellas que tienen el mismo denominador.
Para sumar o restar fracciones homogéneas basta con dejar el mismo denominador y sumar o restar los numeradores.

Ejemplo1:

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Fracciones heterogéneas: son aquellas que tienen diferente denominador.

Para sumar o restar fracciones con diferente denominador, se igualan los denominadores de las fracciones, buscando el mínimo común múltiplo entre los denominadores y amplificando cada fracción por el número que corresponda. Luego, se realiza la adición o sustracción de la misma forma que en el caso anterior (igual denominador).

En el caso que sean 2 fracciones, siendo a, b, c, d diferentes a 0, lo podemos representar de la siguiente forma;

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

Figura 3
Fuente: Propia.

a) $$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{15 + 14}{35} = \frac{29}{35}$$

b) $$\left(\frac{9}{10} + \frac{7}{8}\right) - \frac{2}{5} = \frac{9 \cdot 8 + 10 \cdot 7}{10 \cdot 8} - \frac{2}{5} = \frac{72 + 70}{80} = \frac{142}{80} - \frac{2}{5} =$$

El m.c.m. entre 80 y 5 es 80, entonces;

$$= \frac{142}{80} - \left(\frac{2 \cdot 16}{5 \cdot 16}\right) = \frac{142}{80} - \frac{32}{80} = \frac{142 - 32}{80} = \frac{\cancel{110}^{:10}}{\cancel{80}_{:10}} = \frac{11}{8}$$

c) $$\left(1,\overline{7} - \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{6} = \left(\frac{17-1}{9} - \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{6} = \left(\frac{16}{9} - \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{6} =$$

$$= \left(\frac{16}{9} - \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3}\right) + \frac{1}{6} = \left(\frac{16}{9} - \frac{15}{9}\right) + \frac{1}{6} = \left(\frac{16 - 15}{9}\right) + \frac{1}{6} =$$

El m.c.m. entre 9 y 6 es 18, entonces;

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} = \frac{2 + 3}{18} = \frac{5}{18}$$

Imagen 6
Fuente: Propia.

Multiplicación de números racionales

El producto de dos números racionales es otro número racional que tiene:

Por numerador el producto de los numeradores.

Por denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

División de números racionales

La división de dos números racionales es otro número racional que tiene:

Por numerador el producto de los extremos.

Por denominador el producto de los medios.

(:) Significa división

Ejemplo:

$$\frac{5}{7} : \frac{1}{6} = \frac{30}{7}$$

También podemos definir la división de dos números racionales como producto del primero por el inverso multiplicado del segundo.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{5}{7} : \frac{1}{6} = \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{1} = \frac{30}{7}$$

Revise los siguientes ejercicios donde se combinan la operatividad básica de los racionales

Calcular las siguientes operaciones con números racionales:

1. $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)= \left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=3+\frac{1}{4}-2-\frac{1}{6}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{12+3-2}{12}=\frac{13}{12}$

2. $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)= \frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}:\left(\frac{3+4}{12}\right)=\frac{1}{2}:\frac{7}{12}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

Efectúa las divisiones de números racionales:

1. $\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$

2. $\frac{3}{\frac{1}{2}}= \frac{3}{\frac{1}{2}}=3:\frac{1}{2}=6$

3. $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}:\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$

Realiza las operaciones con números racionales:

1. $$\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6+1}{4}}{\frac{5-2}{6}}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{6}}=\frac{7}{4}:\frac{3}{6}=\frac{7}{4}:\frac{1}{2}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

2. $$\frac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}=\frac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{-12+9-4}{12}}{\frac{8-1}{4}}=\frac{\frac{-7}{12}}{\frac{7}{4}}=\frac{-7}{12}:\frac{7}{4}=-\frac{28}{84}=-\frac{7}{21}=-\frac{1}{3}$$

3. $$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{2-1}{2}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{1-2}=1-\frac{1}{-1}=1+1=2$$

Números irracionales

Un número irracional es un número que no se puede escribir en fracción - el decimal sigue para siempre sin repetirse.

Ejemplo: Pi es un número irracional. Su valor es 3,1415926535897932384626433832795..

Los decimales no siguen ningún patrón, y no se puede escribir ninguna fracción que tenga el valor Pi.

Números como $^{22}/_{7}$ = 3,1428571428571... se acercan pero no son correctos.

Ejemplo: ¿La raíz cuadrada de 2 es un número irracional?

La calculadora dice que la raíz de 2 es 1,4142135623730950488016887242097, ¡pero eso no es todo! De hecho sigue indefinidamente, sin que los números se repitan.

No se puede escribir una fracción que sea igual a la raíz de 2. Así que la raíz de 2 es un número irracional.

Números irracionales famosos

Pi es un número irracional famoso. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin repetirse. Los primeros son estos:

3,1415926535897932384626433832795 (y sigue...).

El número e (el número de Euler) es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de e sin encontrar ningún patrón. Los primeros decimales son:

2,7182818284590452353602874713527 (y sigue...).

La razón de oro es un número irracional. Sus primeros dígitos son: 1,61803398874989484820.....

Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son irracionales. Ejemplos:

√3	1,7320508075688772935274463415059 (etc.).

Pero √4 = 2, y √9 = 3, así que no todas las raíces son irracionales.

Operaciones con números irracionales

Antes de empezar a sumar, restar, multiplicar, y realizar cualquier tipo de las operaciones con números irracionales, debemos comprender como extraer, e introducir factores dentro de los radicales que serán nuestro principal elemento dentro de estas operaciones.

Extracción de factores:

Cuando tenemos radicales cuyos factores pueden ser reducidos o extraídos de la raíz podemos hacerlo siempre y cuando el exponente de la potencia sea igual o mayor que la raíz. En primer lugar ofrecemos un número cuyo exponente es mayor al de la raíz, por

ejemplo:

$\sqrt[3]{x^7}$ luego se puede descomponer la potencia de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{x^3 * x^3 * x} = \sqrt[3]{x^3} * \sqrt[3]{x^3} * \sqrt[3]{x}$$

Se debe simplificar las potencias con las raíces iguales, lo que da como resultado:

$$x * x * \sqrt[3]{x} = x^2 * \sqrt[3]{x}$$

Suma y resta radicales

Para sumar o restar números irracionales es importante que se expresen todas las raíces en términos semejantes extrayendo y expresando las cantidades como se trabajó en la extracción de factores en el tema anterior, acto seguido se opera común y corriente.

Revise el siguiente ejemplo y trate de seguir la regla para extraer factores.

Ejemplo 1

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} = 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3^3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$$

En el ejemplo el índice de la raíz es 2 por tanto la descomposición de factores debe ser en términos de la potencia 2.

Ejemplo 2

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} = = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

En el ejemplo el índice de la raíz es 3 por tanto la descomposición de factores debe ser en términos de la potencia 3.

Multiplicación de radicales

Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

ejemplo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

Reducción de radicales a índice común

1. Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice
2. Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

Ejemplo 1.

$\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$

$\mathrm{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$

Y simplificado cada radical se tiene:

$\sqrt[12]{2^6}$ $\qquad$ $\sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8}$ $\qquad$ $\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$

Ejemplo 2: primero se reducen a índice común y luego se multiplican.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$

$m.c.m.(2, 3, 4) = 12$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\ \sqrt[12]{3^{11}}$$

Ejemplo 3: $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$ $\qquad$ $\mathrm{m.c.m.}(2, 3) = 6$

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6\sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$$

Racionalización de Radicales:

Racionalizar un radical es el proceso mediante el cual se quita o suprime la raíz del denominador.

Ejemplo.1.

$$\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2^2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 2.

$$\frac{2}{3+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6-2\sqrt{3}}{9-3}=\frac{6-2\sqrt{3}}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

Ya para cerrar esta unidad temática veamos cómo cada uno de los universos numéricos hacen parte de ese gran conjunto llamado el conjunto de los números Reales donde se observa que la unión de los Irracionales con los Racionales forman ese gran conjunto.

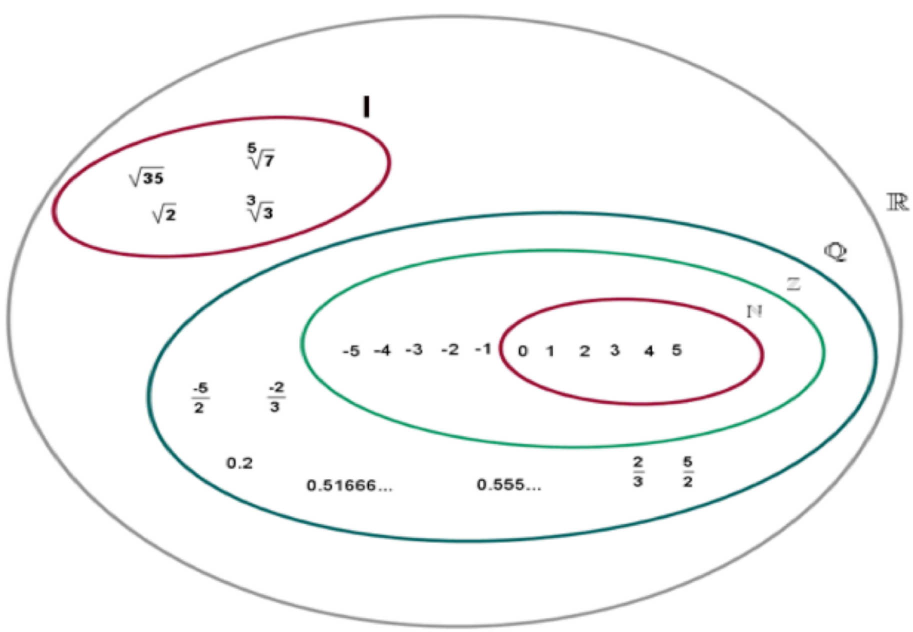


Imagen 6

Fuente: http://3.bp.blogspot.com/-E-zBEqiCp5Y/U4jjqdh3xdI/AAAAAAAAAKI/CJfFGbGsjUc/s1600/RD.gif

El siguiente cuadro encuentra las propiedades más utilizadas en los números reales.

Elemento identidad	Suma: $a + 0 = 0 + a = a$	Producto: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento inverso	Suma: $a + (-a) = -a + a = 0$	Producto: $a\,(1/a) = (1/a)a = 1$, $a^{1}0$
Ley Asociativa	Suma: $a + (b + c) = (a + b) + c$	Producto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Ley Conmutativa	Suma: $a + b = b + a$	Producto: $a \cdot b = b \cdot a$
Ley Distributiva	Producto sobre la suma: $a\,(b + c) = (b + c)\,a = ab + ac$	

Cuadro 1
Fuente: Propia.

2

Unidad 2

Proporcionalidad

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciados estudiantes en esta cartilla se encuentran relacionados los temas correspondientes a la proporcionalidad directa e inversa que es lo que comúnmente se conoce con el nombre de regla de tres, que para el caso busca resolver situaciones problema en contextos reales y entre ellas el trabajo con porcentajes que son de bastante utilidad y de fácil comprensión.

Los temas que se abordarán buscan que usted como estudiante pueda analizar de forma matemática y grafica las situaciones propias de la proporcionalidad simple y compuesta, directa e inversa logrando establecer relaciones entre las magnitudes que se pueden presentar en el momento de resolver una situación problema.

U2 Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

Desarrollo temático

Proporcionalidad

A continuación revisaremos algunos conceptos que son propios del trabajo de las proporciones y los cuales se deben tener en cuenta para una mejor comprensión y desde allí nos adentramos al trabajo de las proporciones y sus diferentes aplicaciones.

Magnitud: una magnitud es cualquier propiedad que se puede medir numéricamente.

Ejemplos:

La longitud del lado un cuadrado.
La capacidad de una botella de agua.
El número de goles marcados en un partido.
El número de goles marcados por el equipo A.

Razón: es el cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí, expresado como fracción.

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \quad \textbf{antecedente} \\ \rightarrow \quad \textbf{consecuente} \end{array}$$

Los términos de una razón se llaman: antecedente y consecuente. El antecedente es el dividendo y el consecuente es el divisor.

Diferencia entre razón y fracción

La razón en los lados de un rectángulo de 5 cm de altura y 10 cm de base es:

$\frac{5}{10}$ No hay que confundir razón con fracción.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción, entonces a y b son números enteros con b≠0, mientras que en la razón $\frac{a}{b}$ los números a y b pueden ser decimales.

Proporción es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \begin{array}{ll} a, d & \textit{extremos} \\ b, c & \textit{medios} \end{array}$$

En una proporción del producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{2}{5} = \frac{4}{10} \qquad 2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$$

Cuarto proporcional

Es uno cualquiera de los términos de una proporción.

Para calcularlo se divide por el opuesto, el producto de los otros dos términos.

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{10} \qquad x = \frac{2 \cdot 10}{4} \qquad x = 5$$

$$\frac{x}{5} = \frac{4}{10} \qquad x = \frac{5 \cdot 4}{10} \qquad x = 2$$

Medio proporcional

Una proporción es continua si tiene los dos medios iguales. Para calcular el medio proporcional de una proporción continua se extrae la raíz cuadrada del producto de los extremos.

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \qquad x^2 = 3 \cdot 12 \qquad x = \pm\sqrt{36} \qquad x = \pm 6$$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Se establece una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes cuando:

A más corresponde más.
A menos corresponde menos.

Ejemplos:

Son magnitudes directamente proporcionales, el peso de un producto y su precio.

- El espacio recorrido por un móvil y el tiempo empleado.
- El volumen de un cuerpo y su peso.
- La longitud de los lados de un polígono y su área.

Regla de tres simple directa e inversa

Directa

Consiste en que dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes directamente proporcionales, calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{D} C \\ A_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{C}{x} \qquad x = \frac{A_2 \cdot C}{A_1}$$

La regla de tres directa la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A más $\longrightarrow$ más.

A menos $\longrightarrow$ menos.

Ejemplo 1

En 50 litros de agua de mar hay 1300 gramos de sal ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple, triple, etc. Las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son directamente proporcionales.

Si representamos por x el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

Litros de agua	50	x
Gramos de sal	1300	5200

Tabla 1
Fuente: Propia.

Se verifica la proporción: $\frac{50}{1300} = \frac{x}{5200}$

Y como en toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos, resulta:

50.5200=1300.x $\qquad x = \frac{50.5200}{1300} = 200$

Es decir En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\begin{array}{l} \textit{En } 50\,l \textit{ hay } 1300\,g \textit{ de sal} \\ \textit{En } x\,l \textit{ habrá } 5200\,g \textit{ de sal} \end{array} \left.\begin{array}{l} 50\,l \underline{\quad\quad} 1300\,g \\ x\,l \underline{\quad\quad} 5200\,g \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{50.5200}{1300} = 200$$

Ejemplo 2

Un carro gasta 5 litros de gasolina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer el carro?

$$\left.\begin{array}{l} 5l \text{ \_\_\_\_\_\_ } 100\,km \\ 6l \text{ \_\_\_\_\_\_ } x \;\; km \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{6.100}{5} = 120$$

Luego con 6 litros el carro recorrerá 120 km.

¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

como **y = k x entonces: k = y / x**

Calcula la constante de proporcionalidad:

x	**3**	**6**	**7**
y	**6**	**12**	**14**

Tabla 2
Fuente: Propia.

k = 6 / 3k = 2

El cociente de las dos magnitudes es siempre el mismo (constante).

Gráfico de proporcionalidad directa

El gráfico correspondiente a una relación de proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el punto de origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

En una función de prorcionalidad directa, si una de las variables aumenta, la otra también aumenta en un mismo factor; y si una de las variables disminuye, la otra disminuye en un mismo factor.

Ejemplo:

Juan ha utilizado 20 huevos para hacer 4 tortillas iguales ¿Cuántos huevos necesita para hacer 6 tortillas? ¿Y para hacer 2?

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30

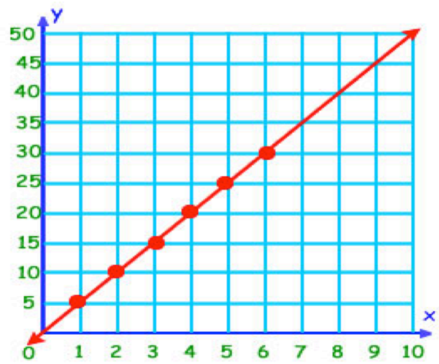


Imagen 1
Fuente: Propia.

Grafica los resultados hasta 6 tortillas.

Como puede ver, el gráfico es una línea recta que pasa por el origen. Además si nos fijamos en la tabla, nos podemos dar cuenta que el cociente (división) entre las dos magnitudes (y / x) es constante. En este caso el valor de la constante de proporcionalidad es 5.

INVERSA

Consiste en que dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes inversamente proporcionales, calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{I} C \\ A_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{C}{x} \qquad x = \frac{A_1 \cdot C}{A_2}$$

La regla de tres inversa la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A más $\longrightarrow$ menos.

A menos $\longrightarrow$ más.

Son magnitudes inversamente proporcionales, la velocidad y el tiempo:

A más velocidad corresponde menos tiempo.
A menos velocidad corresponde más tiempo.

Ejemplo 1

Un vehículo tarda en realizar un trayecto 6 horas si su velocidad es de 60 km/h, pero si doblamos la velocidad el tiempo disminuirá a la mitad. Es decir, si la velocidad es de 120 km/h el tiempo del trayecto será de 3 horas.

Ejemplo 2

Un ganadero tiene pasto suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de pasto a 450 vacas?

Vemos que con el mismo pasto, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto son magnitudes inversamente proporcionales.

x= número de días para el que tendrán comida las 450 vacas.

Nº de vacas	**220**	**450**
Nº de días	**45**	**x**

Tabla 3
Fuente: Propia.

Se cumple que: 220.45=450.x, de donde $x = \frac{220.45}{450} = 22$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} 220\ vacas\ tienen\ para\ 45\ días \\ 450\ vacas\ tienen\ para\ x\ \ días \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 220 vacas \_\_\_\_\_ 45\ días \\ 450 vacas \_\_\_\_\_\_ x\ días \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{220.45}{450} = 22$$

Luego 450 vacas podrán comer 22 días.

Ejemplo 2

Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

$$\left.\begin{array}{l} 8\ toneles \_\_\_\_\_\_ 200\ litros \\ 32\ toneles \_\_\_\_\_ x\ litros \end{array}\right\} x = \frac{8.200}{32} = 50$$

Pues la cantidad de vino=8.200=32.x

Debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.

Gráfico de proporcionalidad inversa

Esta relación de proporcionalidad inversa se puede representar como una función de la forma:

$$\mathbf{y = k / x}$$

La representación gráfica de esta función son puntos que pertenecen a una curva, llamada hipérbola.

x	3	6	12	1
y	8	4	2	24

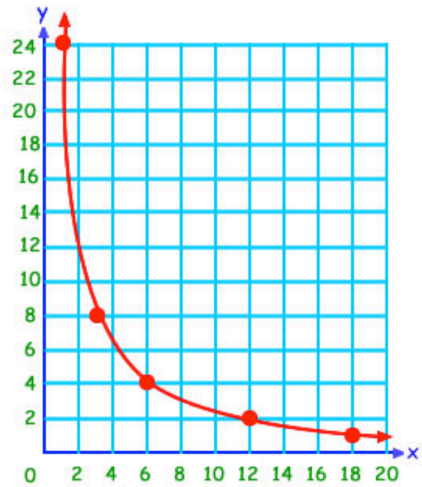


Imagen 2
Fuente: Propia.

Porcentajes

Un porcentaje es un tipo de regla de tres directa en el que una de las cantidades es 100.

Ejemplo 1

Una moto cuyo precio era de $5.000, cuesta en la actualidad 250 $ más ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

5000 $ ⟶ 250 $

100 $ ⟶ x

$$\frac{5000}{100} = \frac{250}{x} \qquad x = \frac{250 \cdot 100}{5000} = 5$$

El 5%.

Ejemplo 2

De los 800 alumnos de la FUAA, han ido de viaje 600 ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

800 alumnos $\longrightarrow$ 600 alumnos.

100 alumnos $\longrightarrow$ x alumnos.

$$\frac{800}{100} = \frac{600}{x} \qquad x = \frac{600 \cdot 100}{800} = 75\%$$

Ejemplo 3

El precio de un computador es de 1200 pesos sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16%?

100 $ $\longrightarrow$ 116 $

1200 $ $\longrightarrow$ x

$$\frac{\mathbf{100}}{\mathbf{1200}} = \frac{\mathbf{116}}{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1200.116}}{\mathbf{100}} = \mathbf{1.392}\boldsymbol{pesos}$$

Regla de tres compuesta directa e inversa

Compuesta directa

La regla de tres compuesta se emplea cuando se relacionan tres o más magnitudes, de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas obtenemos la desconocida.

Una regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples aplicadas sucesivamente.

Como entre las magnitudes se pueden establecer relaciones de proporcionalidad directa o inversa, podemos distinguir tres casos de regla de tres compuesta:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{\quad} B_1 \xrightarrow{\quad} C_1 \xrightarrow{\quad} D \\ A_2 \xrightarrow{\quad} B_2 \xrightarrow{\quad} C_2 \xrightarrow{\quad} x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}$$

Ejemplo

Nueve grifos abiertos durante 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de 20 €. Averiguar el precio del vertido de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días.

A más grifos, más euros $\longrightarrow$ Directa.

A más horas, más euros $\longrightarrow$ Directa.

$$\begin{array}{l} 9 \text{ grifos} \longrightarrow 10 \text{ horas} \longrightarrow 20\,€ \\ 15 \text{ grifos} \longrightarrow 12 \text{ horas} \longrightarrow x\,€ \end{array}$$

$$\frac{9}{15} \cdot \frac{10}{12} = \frac{20}{x} \qquad\qquad \frac{90}{180} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20 \cdot 180}{90} = 40\,€$$

Compuesta inversa

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{C_2}{C_1} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1 \cdot D}{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2}$$

Ejemplo

5 obreros trabajando, trabajando 6 horas diarias construyen un muro en 2 días ¿Cuánto tardarán 4 obreros trabajando 7 horas diarias?

A menos obreros, más días $\longrightarrow$ Inversa.

A más horas, menos días $\longrightarrow$ Inversa.

5 obreros $\longrightarrow$ 6 horas $\longrightarrow$ 2 días.

4 obreros $\longrightarrow$ 7 horas $\longrightarrow$ x días.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{x} \qquad \frac{28}{30} = \frac{2}{x} \qquad x = 2.14 \text{ días}$$

2

Unidad 2

Teoría de los exponentes

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciado (a) estudiante en esta cartilla se encuentran los temas relacionados a la potenciación y radicación, desde allí se busca abordar estas dos operaciones que son conocidas como inversas una de la otra y que se ubican de forma especial en los universos numéricos trabajados anteriormente.

En esta semana se trabajará las propiedades de los exponentes y los radicales la cuales son de vital importancia para en la operatividad en otros campos de la matemática y ayudará a resolver de forma más práctica y ágil ciertos ejercicios y situaciones que involucran estas dos operaciones.

U2

Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

Teoría de los exponentes

Los exponentes también se llaman **potencias** o **índices**

El exponente de un número dice cuántas veces se multiplica el número.

Ejemplo: $8^2 = 8 \times 8 = 64$.

En palabras: 8^2 se puede leer "8 a la segunda potencia", "8 a la potencia 2" o simplemente "8 al cuadrado".

Propiedades de la potenciación

1. Potencia de igual base. $x^m x^n = x^{m+n}$.

Basta con dejar la misma base y sumar los exponentes.

Ejemplo: $x^2x^3 = (xx) \times (xxx) = xxxxx = x^5$

Así que $x^2x^3 = x^{(2+3)} = x^5$

Ejemplo: $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 = 3^{3+4+1} = \mathbf{3^8}$

2. Cociente de potencias de igual base $x^m/x^n = x^{m-n}$.

Como en el ejemplo anterior, ¿Cuántas veces multiplicas "x"?

Respuesta: "m" veces, después **reduce eso** "n" veces (porque estás dividiendo), en total "m-n" veces.

Ejemplo: $x^{4-2} = x^4/x^2 = (xxxx) / (xx) = xx = x^{2.}$

(Recuerda que x/x = 1, así que cada vez que hay una x "sobre la línea" y una "bajo la línea" puedes cancelarlas siempre y cuando los exponentes sean iguales).

Ejemplo: $5^7/\ 5^3 = 5^{7-3} = \mathbf{5^4}$

3. Base con exponente cero por qué $\mathbf{x^0=1}$:

Ejemplo: $x^2/x^2 = \mathbf{x^{2-2} = x^0 = 1.}$

1. Potencia de una potencia $(x^m)^n = x^{mn.}$

Primero multiplica x "m" veces. Después tienes que **hacer eso "n" veces**, en total m×n veces.

Ejemplo: $(x^3)^4 = (xxx)^4 = (xxx)(xxx)(xxx)(xxx) = xxxxxxxxxxxx = x^{12}$

Así que $(x^3)^4 = x^{3\times4} = x^{12}$

2. Producto de una potencia $(xy)^n = x^n y^{n.}$

Para ver cómo funciona, sólo se ordena las "x"sy las "y"s como se observa a continuación:

Ejemplo: $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = xyxyxy = xxxyyy = (xxx)(yyy) = x^3y^{3.}$

O se distribuye el exponente en cada una de las bases.

Ejemplo: $(2x3)^2 = 2^2 x\ 3^2 = 4x9 = 36.$

3. Cociente de una potencia $(x/y)^n = x^n/y^{n.}$

Parecido al ejemplo anterior, sólo ordena las "x"s y las "y"s.

Ejemplo: $(x/y)^3 = (x/y)(x/y)(x/y) = (xxx)/(yyy) = x^3/y^{3.}$

O se distribuye el exponente entre el numerado y el denominador.

Ejemplo: $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

4. Exponente Fraccionario $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Para entenderlo, sólo recuerda de las fracciones que n/m = n × (1/m):

Ejemplo: $x^{\frac{m}{n}} = x^{(m \times \frac{1}{n})} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ donde el numerador del exponente será el exponente de la base y el denominador será el índice de la raíz como se observa en el ejemplo.

Ejemplo: $\mathbf{4^{\frac{2}{4}}} = \sqrt[4]{\mathbf{4^2}} = \sqrt[4]{\mathbf{16}} = \mathbf{2.}$

5. El extraño caso de 0^{0}.

Hay dos argumentos diferentes sobre el valor correcto. 0^0 podría ser 1, o quizás 0, así que alguna gente dice que es "indeterminado":

$x^0 = 1$, así que ...	$0^0 = 1$
$0^n = 0$, así que ...	$0^0 = 0$
Cuando dudes...	0^0 = *"indeterminado"*

Tabla 1
Fuente: Propia.

Nota: es importante que tenga claro dos condiciones generales de los exponentes en relación con los signos.

A. Toda base negativa elevada a un exponente par su resultado siempre va a ser positivo.
B. Toda base negativa elevada a un exponente impar su resultado siempre será negativo.

Operaciones con potenciación

A continuación encontrará una serie de ejemplos que le permitirán analizar algunas operaciones de común uso en el momento de utilizar los exponentes teniendo en cuenta sus propiedades y condiciones generales.

1. $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^9 = \mathbf{-512}$

2. $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-1} = \mathbf{½}$

3. $[(-2)^{-2}]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{-6} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = -2$

4. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^{-4} = \mathbf{-3}$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

7. $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{24}$

Otro ejemplo donde se utilizan la potenciación es en el cálculo de las áreas de cuadrados y en los que se han llamados cuadrados perfectos como se observa en el siguiente ejemplo.

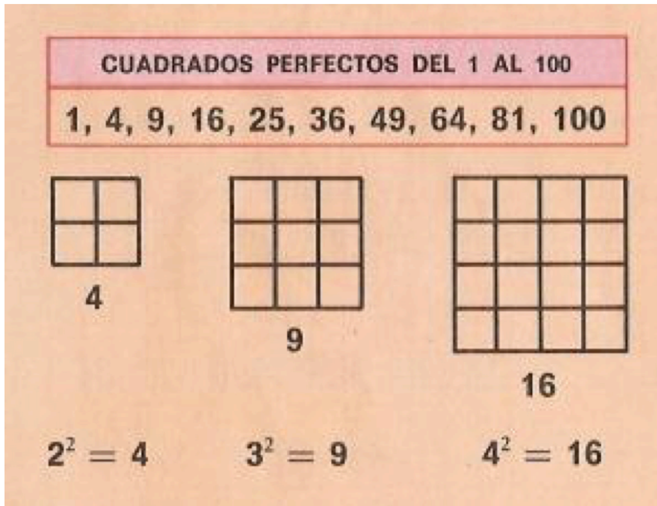


Imagen 1
Fuente: http://1.bp.blogspot.com/-AmPoIDYe9i0/UuX9m9Q3-LI/AAAAAAAAAE0/3SxLOTDmpjQ/s1600/cua.png

Propiedades de la radicación

La radicación es en realidad otra forma de expresar una potenciación: la raíz de cierto orden de un número es equivalente a elevar dicho número a la potencia inversa. Por esto, las propiedades de la potenciación se cumplen también con la radicación. Para que estas propiedades se cumplan, se exige que el radicando de las raíces sea positivo.

1. **Raíz de un producto**

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo

- $\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12.$$

2. Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

3. Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo

- $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[27]{5}.$

3 Unidad 3

Operaciones algebraicas

Matemáticas para psicología

Autor: Javier Cortés Martin

Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Introducción

Apreciado (a) estudiante en esta cartilla se encuentran los temas relacionados con las expresiones algebraicas y sus operaciones, desde allí se busca abordar elementos generales del algebra caracterizando sus expresiones y su aplicación en el contexto matemático.

En esta semana se trabajará las expresiones algebraicas, su clasificación y las operaciones básicas las cuales obedecen a las leyes generales de la matemática.

U3

Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

Operaciones algebraicas

Introducción

El álgebra tuvo sus inicios en Babilonia, unos 1.000 años A.C, quienes usaban primordialmente el álgebra para resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Por el contrario, la mayoría de los egipcios de esta época resolvían tales ecuaciones por métodos geométricos. Los griegos usaban el álgebra para expresar ecuaciones y teoremas, un ejemplo es el Teorema de Pitágoras. Los matemáticos más destacados en este tiempo fueron Arquímedes, Herón y Diofanto de Alejandría, quien fue considerado "el padre del álgebra".

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el *Libro III de la Geometría* (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos.

Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas son combinaciones de letras y números separados por los signos de las operaciones básicas: adición, diferencia, multiplicación y división. El lenguaje algebraico es una de las formas de expresar el lenguaje natural por medio de símbolos matemáticos y letras denominadas variables, por ejemplo en la expresión:

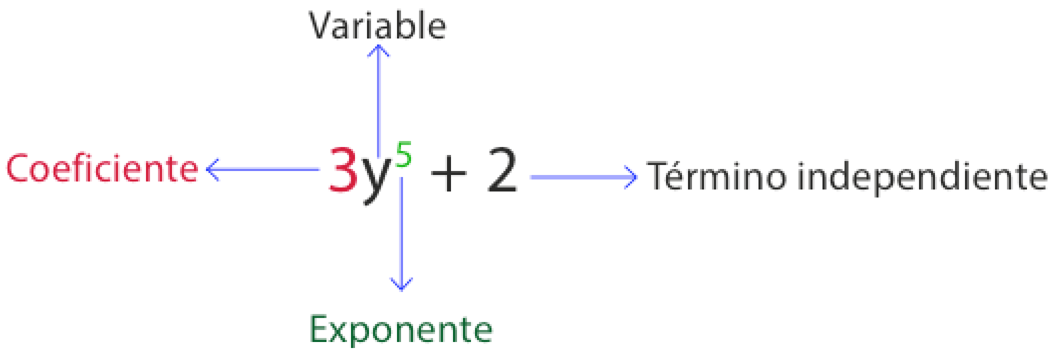


Figura 1
Fuente: Propia.

En donde:

Las **variables** son letras que representan valores desconocidos.

Los **coeficientes** son valores constantes conocidos y anteceden a las variables en forma de producto.

El **término independiente** es un valor conocido y no depende de ninguna variable.
Los **Exponentes** son las potencias asociadas a las variables.

Veamos algunos ejemplos del lenguaje algebraico:

a) La edad de Juan es 5 veces la edad de Pedro.

Como la edad de Pedro es desconocida vamos a representar dicho valor con la letra p y si la edad de Juan es 5 veces la edad de Pedro se puede calcular multiplicando la edad de Pedro por 5, esto es 5.p.

b) María tiene 300 pesos más que Luis.

Como el dinero que tiene Luis es desconocido vamos a representar dicho valor con la letra L y si María tiene 300 pesos más que Luis se puede calcular sumando el dinero de Luis más los $300 de María, esto es L + $300.

c) Expresar el perímetro de cualquier rectángulo cuya base sea a y altura b:

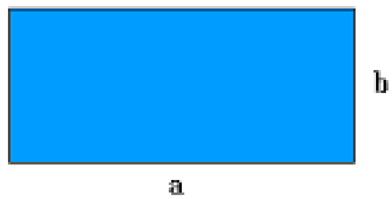


Imagen 1
Fuente: Propia.

Como el perímetro de un polígono equivale a la suma de sus lados, éste se puede expresar como:
$a + b + a + b$, esto es $a + a + b + b$ (aplicando las propiedades conmutativa y asociativa) y finalmente realizando las operaciones correspondientes:
$a + a= 2a$ y $b + b = 2b$, por lo tanto: $P=2a + 2b$.

Las expresiones algebraicas se clasifican en monomios y polinomios, veamos las características de cada uno:

2. Monomios, Polinomios y sus operaciones

Un monomio es una expresión algebraica que consta de una parte literal y un coeficiente y no cuenta con signos de suma o resta. El grado de un monomio es el exponente de su(s) letra(s), o parte literal ($3x^2$, grado = 2). En el caso de que no haya exponente, se asume que es uno (3a, grado = 1), y cuando el monomio cuente con más de una letra, el grado es igual a la suma de sus exponentes. Debe tenerse en cuenta que el grado puede ser en base a una sola letra o a varias de ellas, ($2xy^5$, grado respecto de x e y = 6; respecto de x = 1; respecto y = 5).

Por otro lado, los polinomios resultan de la suma algebraica de monomios ($3x^2y + 3a$). Su grado también es el exponente, pero a diferencia de los monomios puede encontrarse una misma letra varias veces y con distintos exponentes; en este caso el grado corresponde al exponente mayor ($5b^3 + 3b^4$; grado = 4), además si hay más de una letra, al igual que en los monomios, se puede obtener el grado con base a una letra (el mayor exponente de la misma) o con base en todo el polinomio (el resultado más grande, proveniente de la suma de los exponentes de cada una de las letras de un mismo monomio).

Términos semejantes

Los términos de un polinomio son semejantes cuando tienen el mismo parte literal, es decir la(s) letras(s) y el mismo exponente(s). Los términos semejantes se pueden sumar o restar, operando sus coeficientes y conservando el factor literal.
Ejemplos:

a) Los términos del polinomio $3x^2y$, $2x^2y$, son semejantes. (Tienen la misma parte literal e igual exponente).

b) Los términos del polinomio $5y^3 - 15y^3 + 2y^3$, son semejantes. (Tienen la misma parte literal e igual exponente).

c) Los términos del polinomio $5x^2y + 6xy^2$, no son semejantes. (No tienen la misma parte literal y tienen diferente exponente).

d) Los términos del polinomio $5m - 4n$, no son semejantes. (Tienen diferente parte literal).

Operaciones con monomios y polinomios

Las operaciones entre monomios y polinomios son las cuatro básicas: adición, sustracción, multiplicación y división. En todas ellas, el primer paso es unir los términos semejantes con el signo correspondiente y después reducirlos, en el caso de que sea posible.

Adición

De monomios: para esta operación debe colocarse un monomio tras otro, unidos por el signo de suma (+), después reducir la expresión por medio de los términos semejantes y quedan los términos unidos por el signo, los monomios han dado como resultado un polinomio.

Ejemplo:

$$3b + 5b + 7b + 5x + 4 = 15b + 5x + 4$$

De polinomios: de la misma manera que en la adición de monomios, los polinomios deben ubicarse unidos por el signo de suma (+). Un método que facilita las sumas, cuando son extensas, es ubicar los términos en orden descendente respecto de los exponentes y operar los términos semejantes.

Ejemplo:

$(6x^3y^2 – 3x^2 + x^2y) + (x^3y^2 – 2x^2y) = 6x^3y^2 – 3x^2 + x^2y+ x^3y^2 – 2x^2y = 7x^3y^2 – 3x^2 - x^2y$

Sustracción

De monomios: consiste en unir los monomios con el signo de resta (-), y reducirlos.
Ejemplo:
$9b – 3b = 6b$

De polinomios: se ubica el primer polinomio, y en seguida el otro antecedido por el signo (-), así los términos del segundo polinomio cambian. Al final se simplifica.

Ejemplo:

$$(9x^3b – 2xb) – (4x^4b + 6x^3b – 2xb)$$
$$= 9x^3b – 2xb - 4x^4b - 6x^3b + 2xb$$
$$= -4x^4b + 3x^3b$$

Observe que -2xb +2xb son términos semejantes y desaparecen dada la propiedad anulativa de la adición ya que -2+2=0.

Multiplicación

De monomios: para efectuar esta operación, se multiplican los coeficientes de cada monomio y se suman los exponentes de la misma letra.

Ejemplo:

$$(9ab^3x^3). (5a^3b^2x^5) = 45a^4b^5x^8$$

De polinomios: se obtiene multiplicando cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo. En caso de que sean más de dos polinomios, se multiplica el primer polinomio con el segundo y el resultado por el tercer polinomio. La multiplicación de cada término se realiza de la misma manera que con los monomios teniendo en cuenta los términos semejantes.

Ejemplo:

$(2x^4b^5 - 3x^2y^2b + 3xy^3).\ (2x^2b^2 - 4x^4y^3b^3)$

$4x^6b^7 - 6x^4y^2b^3 + 6x^4y^2b^3 - 8x^8y^3b^8 + 12x^6y^5b^4 - 12x^5y^6b^3$ Simplificando por 2

$2x^6b^7 - 3x^4y^2b^3 + 3x^4y\ b_2^3 - 4x^8y^3b^8 + 6x^6y^5b^4 - 6x^5y^6b^3$

División

De monomios: en la división se procede de la misma forma que en la multiplicación; primero se dividen los coeficientes y luego las variables utilizando las propiedades de la potenciación.

Ejemplo:

$8x^5 / 2x^3 = 4x^2$

Los coeficientes a dividir son 8/2 = 4, la variable se mantiene y se restan los exponentes correspondientes, esto es: 5 – 3=2.

De polinomios entre monomio: cuando la división es de un polinomio entre un monomio, se realiza la división de cada término aparte, teniendo en cuenta el procedimiento realizado con los monomios.

Ejemplo:

$$\frac{24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^{10}y^3}{6x^2y^3} =$$

$$4x^3y + 3x^2y^2 - 8x^8$$

División de dos polinomios: por otra parte, cuando la división es entre polinomios Se procede igual que al dividir números enteros.

Ejemplo: $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\
\cline{6-6}
\underline{-x^4} & \underline{-3x^3} & \underline{+2x^2} & & & x^2-5x+6 \\
 & -5x^3 & -9x^2 & +30x & & \\
 & \underline{5x^3} & \underline{+15x^2} & \underline{-10x} & & \\
 & & 6x^2 & +20x & -20 & \\
 & & \underline{-6x^2} & \underline{-18x} & \underline{+12} & \\
 & & & 2x & -8 &
\end{array}
$$

Paso 1: así lo primero es buscar un número que multiplicado por el coeficiente del término de mayor grado del divisor sea igual al coeficiente del término de mayor grado del dividendo.

Paso 2: luego se busca una variable que multiplicada por variable del término de mayor grado del divisor sea igual al coeficiente del término de mayor grado del dividendo.

Paso 3: se multiplica todo el divisor por dicho monomio y el resultado se coloca debajo del dividendo efectuando las operaciones entre los términos correspondientes.

Paso 4: se baja el siguiente término del dividendo. Así hasta que el grado del polinomio, resultante de alguna de las operaciones intermedias, sea menor que el grado del divisor. Éste será el resto de la división.

Paso 5: se baja el siguiente término del dividendo. Así hasta que el grado del polinomio, resultante de alguna de las operaciones intermedias, sea menor que el grado del divisor. Éste será el resto de la división.

Finalmente se comprueba que: dividendo =divisor x cociente +resto

Productos especiales

Son multiplicaciones entre expresiones algebraicas en donde sus resultados se pueden generalizar de acuerdo a ciertas características particulares para encontrar el resultado sin necesidad de realizar toda la operación son aquellos productos que comúnmente se conocen como productos notables.

Cuadrado en un binomio

La expresión $\mathbf{(a \pm b)^2}$ equivale a$\mathbf{a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2}$, es decir, si *a* es el primer término y *b* el segundo, la expresión $(a + b)^2$equivale al cuadrado del primer término, **más** dos veces el primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado.
Gráficamente se tiene:

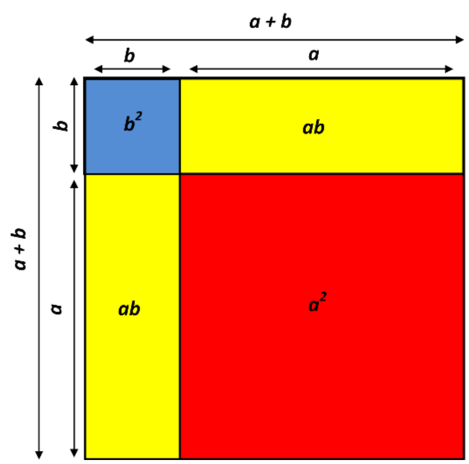


Imagen 2
Fuente: http://2.bp.blogspot.com/-2J9eyFBUEs0/TuolDu1FFZI/AAAAAAAAAEo/7RFg5cJq4j0/s1600/Cuadrado+de+una+suma.png

Ejemplos:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6\,x + 9$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12\,x + 9$$

Nótese que si es negativo los signos empiezan negativos y se intercalan.

Cubo de un binomio

Si en la expresión $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$, *a* es el primer término y *b* es el segundo, entonces la expresión equivale al cubo del primer término, más o menos tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, más tres veces el primer término por el cuadrado del segundo término, más o menos el cubo del segundo término.

Gráficamente se tiene:

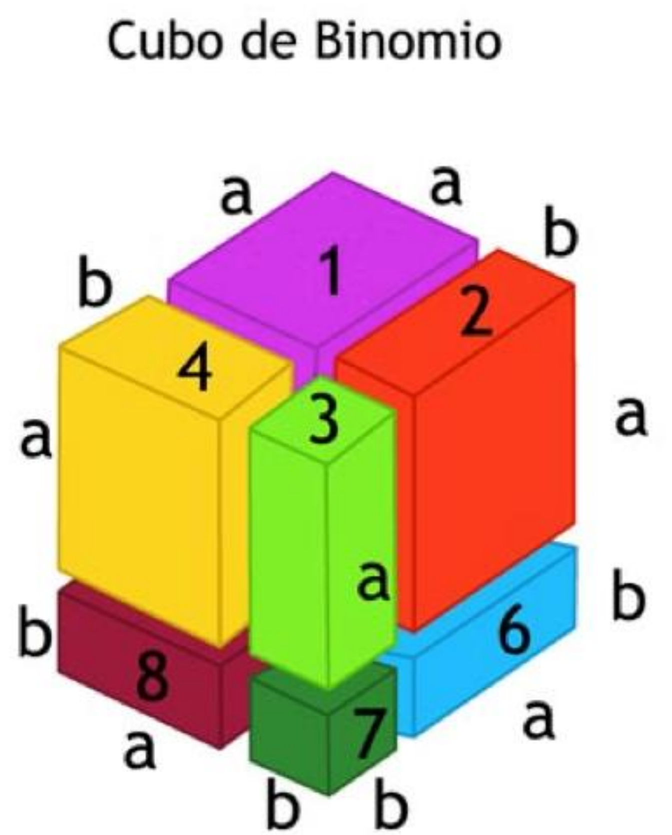


Imagen 3

Fuente: http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/Image/Mdulo1_lgebra%20y%20funciones/CuboBinomioPSU.jpg

Ejemplos:

$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Nótese que al ser una diferencia se intercalan los signos empezando por el menos en el segundo término.

Triangulo de pascal

En potencias que son mayores a 3 se puede utilizar un arreglo triangular conocido como el triángulo de Pascal, que nos ayuda a obtener los coeficientes del desarrollo de dichas potencias:

La suma de todos los valores de cualquier fila del triángulo, es igual a una potencia de 2. La primera fila se denomina fila cero.

1	Fila 0	1
1 1	Fila 1	2
1 2 1	Fila 2	4
1 3 3 1	Fila 3	8
1 4 6 4 1	Fila 4	16
1 5 10 10 5 1	Fila 5	32
1 6 15 20 15 6 1	Fila 6	64

Figura 1

Fuente: Propia

Ejemplos:

1. $\left(a+2b\right)^4$

Como en este caso $n=4$, utilizaremos los coeficientes binomiales con las potencias correspondientes para cada término del desarrollo. Es decir del triángulo tomamos la fila 4, el cual indica que el exponente inicia en 4 y disminuye en el primer término y aumenta en el segundo término teniendo en cuenta los coeficientes numéricos del nivel cuatro.

$$\left(a+2b\right)^4 = 1\left(a\right)^4 + 4\left(a\right)^3\left(2b\right)^1 + 6\left(a\right)^2\left(2b\right)^2 + 4\left(a\right)^1\left(2b\right)^3 + 1\left(2b\right)^4$$

Efectuando las potencias, se tiene:

$$\left(a+2b\right)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3\cdot 2b + 6\cdot a^2\cdot 4b^2 + 4\cdot a\cdot 8b^3 + 1\cdot 16b^4$$

Efectuando los productos:

$$\left(a+2b\right)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

2. n= 5, tomamos los coeficientes de la fila 5 del triángulo.

$$\begin{aligned}(x^2+2y^3)^5 &= (x^2)^5 + 5(x^2)^4(2y^3) + 10(x^2)^3(2y^3)^2 + 10(x^2)^2(2y^3)^3 + 5(x^2)(2y^3)^4 + (2y^3)^5\\ &= x^{10} + 5(x^8)(2y^3) + 10(x^6)(4y^6) + 10(x^4)(8y^9) + 5(x^2)(16y^{12}) + (32y^{15})\end{aligned}$$

$$= x^{10} + 10\,x^8\,y^3 + 40\,x^6y^6 + 80x^4\,y^9 + 80x^2\,y^{12} + 32y^{15}$$

3

Unidad 3

Factorización

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciado (a) estudiante en esta cartilla se encuentran temas relacionados con aplicaciones fundamentales en el trabajo del algebra que posibilita la aplicación de los conocimientos básicos obtenidos en la semana anterior; en esta semana se trabajará la factorización y la simplificación de expresiones algebraicas que retoman fundamentos importantes los cuales le ayudarán a construir un poco más su saber en torno a las aplicaciones de esta rama tan importante de la matemática como lo es el álgebra que da el tránsito para recibir otros niveles de formación en cuanto a la matemática se refiere.

U3 Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

Factorización

Antes de empezar a ver los casos de factorización y la manera como se van a estudiar, debemos tener claro el concepto de **factorizar.**

Cuando hablamos de éste término nos referimos al procedimiento que se aplica a las expresiones algebraicas para expresarlas en factores. Se ordena la expresión de acuerdo a la variable o variables que posee dependiendo de la expresión dada, se pueden presentar varios casos que lo abordaremos de la siguiente manera:

- Factor común
- Binomios:
    - Diferencia de cuadrados.
    - Suma de cubos.
    - Diferencia de cubos.
- Trinomios:
    - Trinomio de la forma x^2+bx+c.
    - Trinomio de la forma ax^2+bx+c.
    - Trinomio cuadrado perfecto.

Factor común

El factor común es una expresión algebraica que cumple con las siguientes condiciones:

Condición 1: la parte numérica es el M.C.D de los coeficientes numéricos de una expresión algebraica.

Condición 2: la parte literal se conforma por todas las letras en común en la expresión algebraica, cada una de ellas con su menor exponente.

Luego de encontrar el factor común, dividimos cada término de la expresión por el factor común, para luego expresar esto como una multiplicación. Observemos el siguiente ejemplo.

$2x^4 + 4x^2$ El M.C.D es 2 y la parte literal común con menor exponente es x^2, entonces queda como factor común $2x^2$, el cual divide a toda la expresión algebraica, quedado de la siguiente manera: $= 2x^2 (x^2 + 2)$

Solución: $2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)$

$5a^2 - 15ab - 10ac$

El factor común entre los coeficientes es 5 y entre los factores literales es a, por lo tanto 5a divide a toda la expresión algebraica.

Solución: $5a^2 - 15ab - 10ac= 5a(a - 3b - 2c)$

Factor común por agrupación

En algunas expresiones algebraicas de más de dos términos podemos notar que no todos los términos tienen factor común, pero si observamos, entre algunos de estos términos si hay factor común, entonces podemos organizarlos y agruparlos de forma conveniente, así:

1. Agrupación de términos.
2. Factorizar cada agrupación.
3. Factorizar el polinomio resultante.

Ejemplo:
$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$

Agrupo los términos que tienen un factor común:

$(2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b)$

Saco el factor común de cada grupo:

$a (2x - y + 5) + b (2x - y + 5)$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales se tiene:

$(2x -y +5)(a + b)$

Ejemplo:

$4a + 4b + xa + xb$

$=4.(a + b) + x.(a + b)$

$= (a + b).(4 + x)$

Factorización de binomios

Diferencia de cuadrados

Es un binomio en donde los coeficientes de los términos tienen raíz cuadrada exacta y los exponentes de las variables son pares. Para factorizar este tipo de expresiones se deben tener en cuenta los siguientes pasos:
1. Verificar si los dos términos del binomio tienen raíz cuadrada exacta y que el signo que los separa sea el menos.
2. Hallar la raíz de cada término, tanto del coeficiente como de la variable y el como segundo factor la diferencia de las raíces.

Ejemplos:

a) $9y^2-4x^2= (3y-2x)\ (3y+2x)$

b) $x^2 - 9/25 =$ $\mathbf{(x + 3/5).(x - 3/5)}$

Suma de cubos

Es la suma de un binomio cuyos términos tienen raíz cúbica exacta. Para factorizar este tipo de expresiones se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Verificar que los términos del binomio tengan raíz cúbica exacta, tanto el coeficiente como la variable.
2. Verificar que los dos términos son positivos.
3. Obtener las raíces cúbicas de cada término, tanto el coeficiente como la variable
4. Construir el producto:

Escribir como primer factor la suma de las raíces obtenidas.
Escribir como segundo factor un trinomio conformado por: el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo:

a) $27x^3 + 125\,y^9 = (3x+5y^3)\,(9x^2-15x\,y^3+25y^6)$

b) $a^3 + 27 = (a+3)\,(a^2- 3a+ 9)$

Diferencia entre cubos

Es la diferencia de un binomio cuyos términos tienen raíz cúbica exacta. Para factorizar este tipo de expresiones se deben seguir los siguientes pasos:

1. Verificar que los dos términos del binomio sean cubos, tanto el coeficiente como la variable.
2. Verificar que los dos términos son de diferente signo.
3. Ordenar los términos primero el positivo y luego el negativo.
4. Obtener las raíces cúbicas de cada término, tanto el coeficiente como la variable.
5. Construir el producto:

Escribir como primer factor la diferencia de las raíces obtenidas.
Escribir como segundo factor un trinomio conformado por: el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos:

a) $1 - a^3 = (1-a)\,(1+a+ a^2)$

b) $x^3 - 27 = (x -3)\,(x^2+ 3x+ 9)$

Factorización de trinomios

Trinomio de la forma x^2+bx+c

Es trinomio que, organizado de forma descendente, el primer término tiene como coeficiente el número 1 y además, su grado es el doble del grado del segundo término. Para factorizar este tipo de expresiones se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Ordenar el trinomio en forma descendente de acuerdo a la variable.
2. Verificar que el primer término tenga coeficiente 1 y la variable esté al cuadrado (potencia par).
3. La variable del segundo término es la raíz cuadrada del primer término (mitad del exponente del primer término).
4. Se calculan dos cantidades cuya suma o resta corresponda al coeficiente del segundo término y el producto corresponda al tercer término teniendo en cuenta que los signos no se alteren al ser comprobada la expresión.
5. Construir el producto.

Ejemplos.

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

$a^2 - 2a - 15 = (a-5)(a+3)$.

Trinomio de la forma ax^2+bx+c **:**

Es un trinomio que, organizado de forma descendente, el primer término tiene como coeficiente un número distinto de 1 y además, su grado es el doble del grado del segundo término. Para factorizar este tipo de expresiones se deben seguir los siguientes pasos:

1. Verificar que el trinomio esté ordenado en forma descendente de acuerdo a la variable.
2. Verificar que el primer término tenga coeficiente diferente de uno y la variable este al cuadrado (potencia par).
3. La variable del segundo término es la raíz cuadrada del primer término (mitad del exponente del primer término).
4. Realizar el producto de los coeficientes **a x c,** este producto se descompone en sus factores primos para facilitar el cálculo de dos números que sumados den **b** y multiplicados **c.**
5. Reescribir el polinomio expresando el segundo término con la suma que calculamos.
6. Agrupar los términos de a dos y se factorizan por agrupación.
7. Construir el producto.

Ejemplos:

$$\mathbf{6x^2 - 7x - 3 = 36x^2 - 6(7x) - 18}$$

$$\mathbf{= \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}}$$

$$\mathbf{= \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{3 \times 2}}$$

$$\mathbf{= (2x-3)(3x + 1)}$$

6 por 6 es igual a 36.
El 6 que está al lado del 7 es el primer término del trinomio.
El primer término del trinomio (6) se multiplica con el tercero (3) = 18.

Se buscan dos números que al sumarlos su resultado sea el segundo término del trinomio (7) y multiplicados el tercero (18).
El denominador de la expresión es el primer término del trinomio.
Se descompone el (6) para que pueda dividir ambos factores.

Trinomio cuadrado perfecto

Se extrae la raíz cuadrada al primer y tercer término del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplos:

$$\mathbf{m^2 + 2m + 1 = (m + 1)(m + 1) = (m+1)^2}$$

Raíz cuadrada de m^2 es m.
Raíz cuadrada de 1 es 1.
Para comprobar si el proceso es correcto se multiplica el numero 2 por las raíces obtenidas $2(m)(1) = 2m$ que es igual al segundo término.
El signo de los dos factores es el correspondiente al segundo término del trinomio.

$$\mathbf{4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)(2x - 5y) = (2x-5y)^2}$$

Raíz cuadrada de 4 es 2 y de x^2 es x.
Raíz cuadrada de 25 es 5 y de y^2 es y.
Para comprobar el proceso $2(2x)(5y) = 20xy$ segundo término del trinomio.
El signo de los dos factores es (-) porque es el signo del segundo término del trinomio.

Simplificación de fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador. Q(x) es el denominador.

Una fracción algebraica es reductible (si se puede simplificar) si su numerador y su denominador se pueden dividir por un mismo factor.

Ejemplos

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$$

$$= \frac{x \cdot (x-3)}{x \cdot (x+3)} =$$ se descompone utilizando factor común en numerador y denominador.

$$= \frac{(x-3)}{(x+3)}$$ se ha eliminado la x del numerador con la del denominador y queda simplificada la fracción y esa nueva fracción es el resulado.

Ejemplo 2 :

$$\frac{x^2 - 3x}{3 - x} = = \frac{x(x-3)}{3-x} = \frac{-x(x-3)}{-3+x} = -x$$

Ejemplo 2:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} =$$

Nótese que en el numerador y denimador tenemos el trinomio de la forma x^2+bx+c, lo cual indica que se factoriza utilizando dicho proceso y se obtiene:

$$\frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x-4)} = = \frac{(x-2)}{(x-4)}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{(x+2).(x-2)}{3.(x-2)}=\frac{(x+2).\cancel{(x-2)}}{3.\cancel{(x-2)}}=\frac{(x+2)}{3}$$

Nota: Es importante que tenga en cuenta que para simplificar cualquier expresión algebraica es importante que identifique el caso de factorización que se presenta en el numerador y denominador, posteriormente factorice y simplifique lo que se pueda simplificar y obtenga una nueva fracción y/o expresión algebraica.

4

Unidad 4

Ecuaciones de primer grado

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciado (a) estudiante en esta semana en la cartilla se encuentran temas relacionados las ecuaciones de primer grado, se hará énfasis en el trabajo de ecuaciones enteras donde solo aparece una incógnita, se trabajará ecuaciones racionales o ecuaciones fraccionarias de igual manera con una sola incógnita, y se hará una aplicación de estas ecuaciones en la solución de situaciones problema que se presentan a menudo en la cotidianidad y que se puede resolver a través de las ecuaciones.

En el trabajo con las ecuaciones es importante que se reconozca la clasificación de las mismas y algunos conceptos que son básicos para el análisis y la utilización década ecuación en el momento de querer resolver sus incógnitas.

U4 Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

Ecuaciones de primer grado

A continuación se retomarán algunos conceptos y ejemplos que son propios para el desarrollo y la comprensión de las ecuaciones.

Igualdad:

Una igualdad se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.

$2x + 3 = 5x - 2$

Una igualdad puede ser:

Falsa si al resolverla no da una igualdad:

Ejemplo

$2x + 1 = 2 \cdot (x + 1)$

$2x + 1 = 2x + 2$

$1 \neq 2.$

Verdadera si al resolverla da una igualdad:

Ejemplo

$2x + 2 = 2 \cdot (x + 1)$

$2x + 2 = 2x + 2$

$2 = 2$

Identidad

Una identidad es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.

Ejemplo:

$2x + 2 = 2 \cdot (x + 1)$

$2x + 2 = 2x + 2$

$2 = 2$

Ecuación

Es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras o variables.

Ejemplo:

$x + 1 = 2 \quad x = 1$

Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

Los términos son los sumandos que forman los miembros.

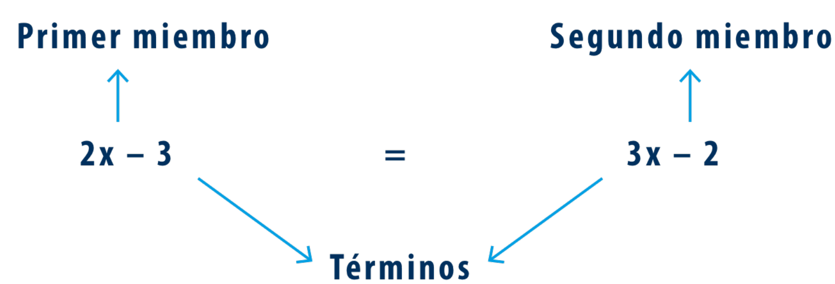


Figura 1
Fuente: Propia.

Las incógnitas son las letras que aparecen en la ecuación.

Las soluciones son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

$2x - 3 = 3x + 2 \quad x = -5$

Al reemplazar el valor de x en la ecuación se comprueba que si es una igualdad.

$2 \cdot (-5) - 3 = 3 \cdot (-5) + 2$

$-10 - 3 = -15 + 2$

$-13 = -13$

El grado de una ecuación es el mayor de los grados (exponente) de los monomios que forman sus miembros, lo cual indica el tipo de ecuación que es y el método a utilizar para poder ser resuelta.

Tipos de ecuaciones según su grado

Ecuación de primer grado.
$5x + 3 = 2x + 1$

Ecuación de segundo grado.
$5x + 3 = 2x^2 + x$

Ecuación de tercer grado.
$5x^3 + 3 = 2x + x^2$

Ecuación de cuarto grado.
$5x^3 + 3 = 2x^4 + 1$

Tipos de ecuaciones polinómicas

1. Ecuaciones de primer grado o lineales.

Son del tipo $\underline{ax + b = 0}$, con $a \neq 0$, o cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

Ejemplo:

$(x + 1)^2 = x^2 - 2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$

$2x + 1 = -2$

$2x + 3 = 0$

2. Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Son ecuaciones del tipo $\underline{ax^2 + bx + c = 0}$, con $a \neq 0$.

Ecuaciones de segundo grado incompletas.

$$ax^2 = 0$$

$$ax^2 + b = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

3. Ecuaciones de tercer grado.

Son ecuaciones del tipo $\underline{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$, con $a \neq 0$.

4. Ecuaciones de cuarto grado.

Son ecuaciones del tipo $\underline{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$, con $a \neq 0$.

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado que no tiene términos de grado impar.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$.

5. Ecuaciones exponenciales.

Son ecuaciones en la que la incógnita aparece en el exponente.

Ejemplos:

1. $2^{2x-1} = 4$

2. $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

3. $2^{x+1} + 2^{x} + 2^{x-1} = 28$

6. Ecuaciones logarítmicas:

Son ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Ejemplos

1. $\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)$

2. $4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x$

3. $\log x = \dfrac{2 - \log x}{\log x}$

3 Ecuaciones trigonométricas.

Son las ecuaciones en las que la incógnita está afectada por una función trigonométrica. Como éstas son periódicas, habrá por lo general infinitas soluciones.

Ejemplos:

1. $\cos 2x = 1 + 4sen\, x$

2. $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

3. $2tg\, x - 3\text{cotg}\; x - 1 = 0$

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

$$2x - 3 = 3x + 2$$

$$x = -5$$

$$x + 3 = -2$$

$$x = -5$$

Criterios de equivalencia de ecuaciones

1. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

$$x + 3 = -2$$

$$x + 3 - 3 = -2 - 3$$

$$x = -5$$

2. Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

$$5x + 10 = 15$$

$$(5x + 10) : 5 = 15 : 5$$

$$x + 2 = 3$$

$$x + 2 - 2 = 3 - 2$$

$$x = 1$$

En general para resolver una ecuación de primer grado debemos seguir los siguientes pasos:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los términos en x *en un miembro y los términos independientes en el otro.*

4º Reducir los términos semejantes.

5º Despejar la incógnita.

A continuación se presentarán algunos ejemplos de soluciones de ecuaciones de primer grado enteras y fraccionarias o racionales…preste mucha atención al desarrollo de cada una de ellas.

Ejemplo 1

$2x - 3 = 6 + x$

Agrupamos los términos semejantes y los independientes, y sumamos:

$2x - x = 6 + 3 \qquad x = 9$

Ejemplo 2

$2(2x - 3) = 6 + x$

Quitamos paréntesis a través de la multiplicación:

$4x - 6 = 6 + x$

Agrupamos términos y sumamos:

$4x - x = 6 + 6 \qquad 3x = 12$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{12}{3} \qquad x = 4$$

Ejemplo 3, corresponde a una ecuación racional:

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo.

$$\text{m.c.m.}(6,\ 2) = 6$$

El m.c.m multiplica a toda la ecuación y obtenemos la nueva ecuación

$$x - 1 - 3(x - 3) = -6$$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$x - 1 - 3x + 9 = -6; \qquad x - 3x = -6 - 9 + 1; \qquad -2x = -14$$

Despejamos la incógnita:

$$2x = 14 \qquad x = \frac{14}{2} \qquad x = 7$$

Ejemplo 4

$$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$$

Quitamos paréntesis y simplificamos:

$$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \qquad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$$

Quitamos denominadores con el m.c.m, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$3x + 6 = 2x + 38 \qquad 3x - 2x = 38 - 6 \qquad x = 32$$

Ejemplo 5

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos el paréntesis y se obtiene:

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos el corchete al multiplicar por el signo negativo toda la expresión:

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos denominadores con el m.c.m:

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)=8x-(5x-3)+36x$$

Quitamos paréntesis:

$$24+24x+24+6x-18=8x-5x+3+36x$$

Agrupamos términos semejantes:

$$24x+6x-8x+5x-36x=3-24-24+18$$

Sumamos:

$$-9x=-27$$

Dividimos los dos miembros por: –9.

$$x=3$$

Solución de problemas con ecuaciones de primer grado:

Ejemplo 1:

Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54 ¿Cuál es el número que representa x?

$$2x-\frac{x}{2}=54$$

$4x-x=108$ $\qquad 3x=108 \qquad x=36$

Ejemplo 2:

La base de un rectángulo es doble que su altura ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

Altura $\rightarrow$ x
Base $\rightarrow$ 2x
$2 \cdot x + 2 \cdot 2x = 30$ $2x + 4x = 30$ $6x = 30$ $x = 5$
Altura $\rightarrow$ 5 cm
Base $\rightarrow$ 10 cm

Ejemplo 3:

Calcula tres números consecutivos cuya suma sea 51.

X es el primer número.

X+1 el segundo número.

X+2 el tercer número.

$x+x+1+x+2=51$.

$3x+3=51$.

$3x= 51-3$ $3x=48$.

$X=48/3$ $x= 16$.

Los tres números consecutivos son 16, 17, 18.

Revise el siguiente cuadro el cual busca trasladar del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico algunas expresiones las cuales le ayudaran a comprender mejor el trabajo de las ecuaciones.

El doble o duplo de un número: 2x.

El triple de un número: 3x.

El cuádruplo de un número: 4x.

La mitad de un número: x/2.

Un tercio de un número: $x/3$.

Un cuarto de un número: $x/4$.

Un número es proporcional a 2, 3, 4, ...: $2x, 3x, 4x$,..

Un número al cuadrado: $x^{2.}$

Un número al cubo: $x^{3.}$

Dos números consecutivos: x y $x + 1$.

Dos números consecutivos pares: $2x$ y $2x + 2$.

Dos números consecutivos impares: $2x + 1$ y $2x + 3$.

Descomponer 24 en dos partes: x y $24 - x$.

La suma de dos números es 24: x y $24 - x$.

La diferencia de dos números es 24: x y $24 + x$.

El producto de dos números es 24: x y $24/x$.

El cociente de dos números es 24; x y $24 \cdot x$

4

Unidad 4

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones de primer grado

Matemáticas para administración

Autor: Javier Cortés Martin

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Apreciado (a) estudiante, ésta ya es la última semana del módulo de matemáticas, en la cartilla se encuentran temas relacionados con los diferentes métodos utilizados para resolver ecuaciones de primer grado donde se encuentran ecuaciones de dos variables con dos incógnitas y se harán algunas aplicaciones de estas ecuaciones en la solución de situaciones problema que se presentan a menudo en la cotidianidad y que se puede resolver a través de las ecuaciones.

En desarrollo de sistemas de ecuaciones 2x2 se trabajarán los métodos de igualación, sustitución, reducción, determinantes y método gráfico, los cuales darán cuenta de que un sistema de ecuaciones se puede resolver por cualquier método y siempre se obtendrá la misma solución.

Metodología

Para lograr comprender la temática es importante que tenga en cuenta las siguientes sugerencias metodológicas las cuales le ayudarán a asimilar los nuevos conocimientos, a reforzar otros y por último a lograr la comprensión de la unidad temática.

- Haga un chequeo del contenido general de la cartilla.
- Acto seguido retome las temáticas desde el inicio de la cartilla y elabore un mapa de ideas, mapa conceptual o cualquier otra estrategia que usted conozca y siente que le permita ir construyendo su saber.
- Si encuentra palabras desconocidas escríbalas en sus apuntes y en el glosario las puede consultar o en cualquier otro diccionario o por el sitio web.
- Si presenta dificultad en la comprensión de los ejemplos o los ejercicios propuestos, retómelos en su cuaderno de apuntes analícelos y de persistir la duda preséntelos a su tutor, consulte los video tutoriales presentados en los recursos para el aprendizaje, ellos le ayudarán a comprender de forma clara el desarrollo del tema.
- Es importante que trabaje toda la cartilla de principio a fin para que tenga una comprensión clara de la temática. No olvidar elaborar sus propios resúmenes donde se evidencia la claridad del tema.
- Elabore el trabajo a diario para que no pierda la continuidad en el desarrollo de los temas, elabore una y otra vez los ejemplos propuestos.

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones de primer grado

A continuación, se trabajará cada método utilizado para resolver sistemas de ecuaciones de 2x2, preste atención a cada uno de ellos para que pueda establecer diferencias en cada uno de los procesos.

Método de sustitución: para resolver una ecuación por este método es importante que tenga en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
Paso2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
Paso3. Se resuelve la ecuación.
paso4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
Paso5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$2x = 16 - 4y \qquad x = 8 - 2y$

2. Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$3(8 - 2y) - 4y = -6$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$24 - 6y - 4y = -6 \qquad -10y = -30 \qquad y = 3$

4. Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

X= 8-2(3) = 8 – 6= 2

5. Solución: x=2 y=3

Método de igualación: para resolver una ecuación por este método es importante que tenga en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
Paso 2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
Paso 3. Se resuelve la ecuación.
Paso 4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
Paso 5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo: $$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1. **Despejamos**, por ejemplo, la incógnita **x** de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 + 4y \qquad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

2 **Igualamos** ambas expresiones:

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$$

3 Resolvemos la ecuación:

$2(-6+4y)=3(16-4y) \qquad -12+8y=48-12y$

$8y+12y=48+12 \qquad 20y=60 \qquad y=3$

4. Sustituimos el valor de **y,** en una de las dos **expresiones** en las que tenemos **despejada la x:**

$x=\frac{-6+4\cdot 3}{3}=\frac{-6+12}{3} \qquad x=2$

5. Solución: $x=2, \; y=3$

Método de reducción: para resolver una ecuación por este método es importante que tenga en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
Paso 2. La restamos, y cancela una de las incógnitas.
Paso 3. Se resuelve la ecuación resultante.
Paso 4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
Paso 5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{cases}$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x-4y=-6 \xrightarrow{x2} \\ 2x+4y=16 \xrightarrow{x(-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x-8y=-12 \\ -6x-12y=-48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \end{cases}$$

$$-20y = -60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$2x + 4 \cdot 3 = 16 \qquad 2x + 12 = 16 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$

Solución: $x = 2, \ y = 3$

Método gráfico: para resolver una ecuación por el método grafico es importante tener en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1. Se despeja en ambas ecuaciones y, para dejarla en términos de la ecuación de recta y=mx+b, donde m es la pendiente de la recta y b es el punto de corte con el eje y.

Paso 2. Se le dan valores a x, se sugiere sean valores enteros los cuales se reemplazan en la ecuación.

Paso 3. Se construye una tabla de valores para organizar la información y dichos puntos se trasladan al plano cartesiano formando dos rectas, una con pendiente positiva (m) y otra con pendiente negativa, las intercepciones de las dos rectas forman el conjunto solución.

Ejemplo: gráficamente la solución es el punto de corte de las dos rectas.

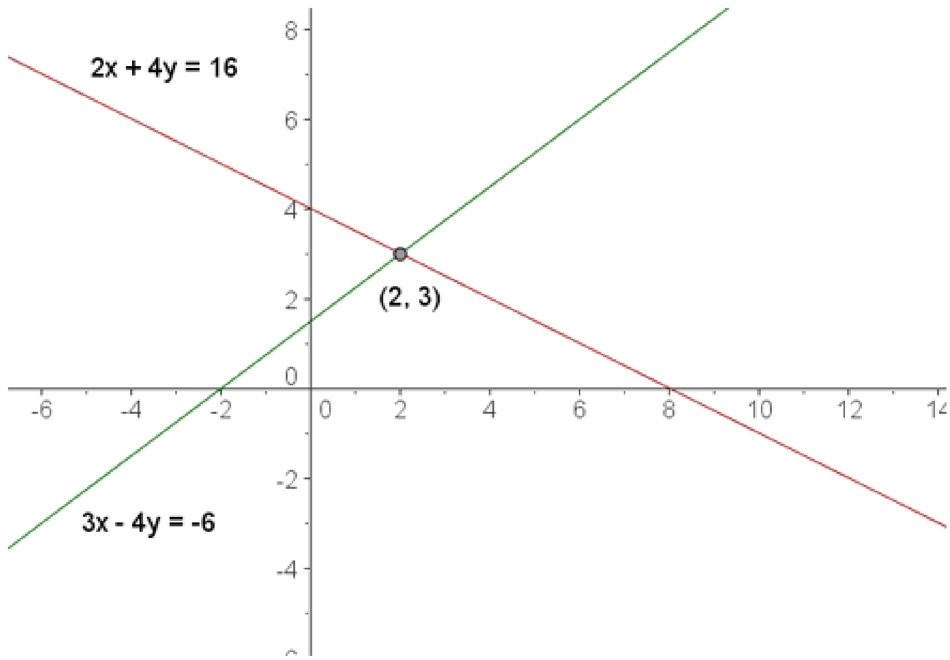


Imagen 1
Fuente:
https://lh3.googleusercontent.com/proxy/FPqMorKExc51qGNKXxvmruXB7zRDAHqgtEM2dTr4CfmzrorCBYWA2wv9voGLstvJj4oXEOiv2rt1t_6NASWf=w426-h294

Método de determinantes: solución de ecuaciones por el método de Cramer.

Los pasos a seguir para calcular los sistemas de ecuaciones según la regla de Cramer son los siguientes:

1. Hallar la matriz ampliada $(A \vdots b)$ asociada al sistema de ecuaciones, esto es: que la primera columna esté formada por las entradas de los coeficientes de la primera incógnita de las ecuaciones; que la segunda columna la formen las de la segunda incógnita, y así hasta llegar a la última columna, que estará constituida por las entradas de los términos independientes de las ecuaciones.

2. Calcular el determinante de *A*.

3. Aplicar la regla de Cramer, que consiste en:

a) Ir sustituyendo la primera columna del det (*A*) por los términos independientes;

b) Dividir el resultado de este determinante entre el det (*A*) para hallar el valor de la primera incógnita;

c) Continuar sustituyendo los términos independientes en las distintas columnas para hallar el resto de las incógnitas.

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Encontrar el valor de *x* e *y* mediante la regla de Cramer.

Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada $A \vdots b$ asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$A \vdots b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & & y & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

El segundo paso es calcular el determinante de *A*. dónde se multiplica en cruz 3*5 y se resta el producto 1*2 teniendo en cuenta los signos.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & y \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{array}}{17} = \frac{5 + 6}{17} = \frac{11}{17}. \qquad y = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & b \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array}}{17} = \frac{9 - 1}{17} = \frac{8}{17}.$$

Solución de problemas con ecuaciones de primer grado de 2x2

Ejemplos:

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

x $\rightarrow$ base del rectángulo.
y $\rightarrow$ altura del rectángulo.

2x + 2y $\rightarrow$ perímetro.

$$\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

Por sustitución tenemos:

$$2 \cdot (3y) + 2y = 16 \quad 6y + 2y = 16 \qquad y = 2 \qquad x = 6$$

6 cm $\rightarrow$ base del rectángulo.
2 cm $\rightarrow$ altura del rectángulo.

2. Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

x $\rightarrow$ número de pavos.
y $\rightarrow$ número de cerdos.

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -116 \\ \underline{2x + 4y = 168} \end{cases}$$
$$2y = 52$$

$$y = 26$$

$$x + 26 = 58 \qquad x = 32$$

Hay 32 pavos y 26 cerdos.

Bibliografia

- Allendofer, O. (s.f.). Fundamentos de Matemática Universitaria. Ed. Mc Graw-Hill.
- Ayra, R. (s.f.). Matemáticas aplicadas.
- Barnett, R. (s.f.). Algebra y Geometría. Ed. McGraw-Hill.
- Draper, J. & Kigman, J. (s.f.). Matemáticas para Administración.
- Eslava, M. & Velasco, J. (s.f.). Introducción a las matemáticas universitarias. McGraw-Hill.
- Haeussler, E. & Richard, P. (s.f.). Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida. Ed. Pearson Prentice Hall.
- Howard. T, & Thomas, W. (s.f.). Matemáticas Básicas. Limusa Wiley S.A.
- Mizrahi, S. (s.f.). Matemáticas Finitas. Limusa.
- Núñez, R. & Soler, F. (s.f.). Fundamentos de Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamericana.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO